

Institut für Produktion und Industrielles Informationsmanagement

Universität Duisburg-Essen / Campus Essen
Fachbereich 5: Wirtschaftswissenschaften
Universitätsstraße 9, 45141 Essen
Tel.: ++ 49 (0) 201 / 183 - 4007
Fax: ++ 49 (0) 201 / 183 - 4017

Arbeitsbericht Nr. 26

Vorgehensmodell zur Auswahl einer Variante der Data Envelopment Analysis

Dipl.-Wirt.Inf. Frank Siemens



E-Mail: frank.siemens@frasie.de

Internet: <http://www.pim.uni-essen.de/>

ISSN 1614-0842

Essen 2005
Alle Rechte vorbehalten.

Zusammenfassung

Der Begriff „Data Envelopment Analysis“ (DEA) wurde erstmals von Charnes/Cooper/Rhodes im Jahr 1978 für ein Verfahren zum effizienzbasierten Leistungsvergleich von verschiedenen organisatorischen Einheiten eingeführt. Dieses Verfahren, welches später nach den Autorennamen als CCR-Modell benannt wurde, ist heute eines von vielen Modellen, die zur DEA gezählt werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Vorgehensmodell zu entwickeln, welches die Auswahl eines DEA-Modells ermöglicht. Dabei liegt der Schwerpunkt in der Berücksichtigung der notwendigen Voraussetzungen, die vorliegen müssen, damit das entsprechende Modell angewendet werden kann.

Abstract

The term „Data Envelopment Analysis“ (DEA) was first used by Charnes/Cooper/Rhodes for a method for an efficiency based comparison of different organisational units in 1978. Today, this method, which was later called the CCR-Model (after the names of the inventors), is one of several methods, which are assigned to DEA.

The goal of this paper is to develop a process model, which one can use to select one of these models. The main focus is to consider all the necessary requirements, which have to be fulfilled for the implementation of the appropriate model.

Der vorliegende Arbeitsbericht beruht auf einer Diplomarbeit, die am Institut für Produktion und Industrielles Informationsmanagement der Universität Duisburg-Essen entstanden ist.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis.....	IV
Akronymverzeichnis.....	V
Symbolverzeichnis.....	VII
Abbildungsverzeichnis.....	IX
Tabellenverzeichnis.....	X
1 Problemeinführung.....	1
2 Grundlagen: Effizienz, DEA und Vorgehensmodell.....	2
2.1 Produktionsprozess.....	2
2.2 Technologie und Produktionsfunktion.....	3
2.2.1 Allgemeiner Effizienzbegriff und DEA Effizienz.....	6
2.2.2 Effizienz.....	6
2.2.3 Grundprinzip der DEA anhand des CCR-Modells.....	10
2.2.3.1 Pareto-Koopmans und radiale Effizienz.....	13
2.2.3.2 Skalenerträge.....	15
2.2.3.3 Lösung des CCR-Modells.....	16
2.2.4 Weitere DEA-Modelle.....	20
2.2.4.1 BCC-Modell.....	21
2.2.4.2 Additive Modelle.....	22
2.2.4.3 Multiplikative Modelle.....	23
2.2.4.4 Free Disposal Hull (FDH).....	24
2.2.5 Modellüberblick.....	25
2.3 Vorgehensmodell.....	25
2.4 Petri-Netze.....	26
3 Voraussetzungen der DEA.....	27
3.1 DMUs.....	27
3.2 DEA-Technologien.....	29
3.2.1 Konvexe Hülle.....	30
3.2.2 Verschwendbarkeit - Disposability.....	31
3.2.3 Minimale Extrapolation.....	32
3.2.4 Probleme mit der relativen Effizienz und der konvexen Hülle.....	32
3.2.5 DEA-Modelle und ihre Technologien.....	34
3.3 Input-/Outputfaktoren und deren Daten.....	37
3.3.1 Maßskalen.....	37
3.3.2 Einheiten.....	39
3.3.3 Wertebereiche.....	41
3.3.4 Indexzahlen.....	43
3.3.5 Qualität.....	44
3.3.6 Abhängigkeiten.....	46
3.3.7 Unerwünschte Faktoren.....	47
3.4 Anzahl der Faktoren und der DMUs.....	47
3.5 A-priori-Wissen.....	49
3.6 Nicht-kontrollierbare Faktoren.....	50
4 Vorgehensmodell.....	51
4.1 Grundlagen zum Vorgehensmodell.....	51
4.2 Phase 1 - Grundsätzliche Eignung für die DEA.....	51
4.3 Phase 2 - DEA-Modellauswahl.....	55
4.4 Phase 3 - Präferenzen, Modifikationen und Überprüfungen.....	59
5 Ergebnisse und kritische Betrachtung des Erreichten.....	61
Literaturverzeichnis.....	63
Anhang 1: Ertragsgebirge im 2-Input/1-Output-Fall.....	76
Anhang 2: Herleitung Primal / Dual des CCR-Modells.....	77

Anhang 3: Mathematische Modellformulierungen.....	83
Anhang 4: Translationsinvarianz.....	90
Anhang 5: Anzahl radial effizienter DMUs bei verschiedenen Hüllen im Vergleich.....	92
Anhang 6: Das Vorgehensmodell im Überblick.....	93
Anhang 7: Eigenschaften der DEA-Modelle.....	97

Abkürzungsverzeichnis

berück.	berücksichtigt
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
evtl.	eventuell
et al.	et alii (lateinisch), zu deutsch: und andere
f.	folgende
ff.	fort folgende
i.O.	in Ordnung
outputori.	outputorientiert
o.V.	ohne Verfasser
S.	Seite(n)
sog.	so genannte(n/r/s)
unerw.	unerwünscht(e/en)
vgl.	vergleiche
vorh.	vorhanden
z.B.	zum Beispiel

Akronymverzeichnis

Add	additives Basis(-Modell)
BCC	DEA-Modell nach BANKER/CHARNES/COOPER
BCC-I	inputorientiertes BCC-Modell
BCC-O	outputorientiertes BCC-Modell
CC	convexity constraint (Konvexitätsbedingung)
CCR	DEA-Modell nach CHARNES/COOPER/RHODES
CCR-I	inputorientiertes CCR-Modell
CCR-O	outputorientiertes CCR-Modell
CRS	constant returns to scale (konstante Skalenerträge)
CV	convexity (Konvexität)
DEA	Data Envelopment Analysis
DLP	Dual eines linearen Programmierungsproblems
DLP ₀	Dual des linearen Programmierungsproblems zur betrachteten DMU
DM	Deutsche Mark
DMU	Decision Making Unit
DMU ₀	aktuell betrachtete DMU
DMU _{virtuell}	(gegebenenfalls) virtuelle DMU, die zur Effizienzbetrachtung der betrachteten DMU gebildet wird
DMUs	Mehrzahl von DMU
DRS	decreasing returns to scale (abnehmende Skalenerträge)
EN ISO 9000	europäische ISO-Norm zu Qualitätsmanagementsystemen - Grundlagen und Begriffe
FD	free disposability (freie Verschwendbarkeit)
FDH	Free Disposal Hull (-Modell)
FDH-I	inputorientiertes FDH-Modell
FDH-O	outputorientiertes FDH-Modell
GRS	generalized returns to scale (generelle Skalenertragsannahmen)
I	Input/inputorientiert
INOUT	Ansatz zum Umgang mit unerwünschten Faktoren: unerwünschte Inputs werden als Outputs angesehen, unerwünschte Outputs werden als Inputs angesehen
INV	Ansatz zum Umgang mit unerw. Faktoren: Kehrwertbildung
InvMult	invariant multiplicative model (invariantes multiplikatives (DEA-)Modell)
IRS	increasing returns to scale (zunehmende Skalenerträge)
ISO	International Organization for Standardization
log-linear	logarithmisch-linear
LP	lineares Programmierungsproblem
LP ₀	lineares Programmierungsproblem zur betrachteten DMU ₀
ME	minimal extrapolation (minimale Extrapolation)
MULT	Ansatz zum Umgang mit unerwünschten Faktoren: Multiplikation mit -1
NDRS	non decreasing returns to scale (nicht-abnehmende Skalenerträge)
NIRS	non increasing returns to scale (nicht-zunehmende Skalenerträge)
O	Output/outputorientiert
OR	Operations Research
PI	Performance Indikator
R	range (Spannweite)
RAM	Range Adjusted Measure (-Modell)
ST-Netz	Stellen-Transitions-Netz
T (<i>T/T</i>)	Technologie
T _{DMU}	Technologie, die aus DMUs aufgespannt wird
T _{DMUS}	Mehrzahl von T _{DMU}

TRANS	Ansatz zum Umgang mit unerw. Faktoren: erst MULT und dann Addition einer Konstanten, um die Werte in den positiven Zahlenraum zu überführen
U	unorientiert/keine Orientierung
VarMult	variant multiplicative model (variantes multiplikatives Modell)
VRS	variable returns to scale (variable Skalenerträge)
WD	Ansatz zum Umgang mit unerw. Faktoren: Annahme von schwacher Effizienz („weak disposability“)

Symbolverzeichnis

E	Einheitsvektor $(1,1,\dots,1)$ / DMU E
e	Eulersche Zahl ($e \approx 2,718281828459\dots$)
min	minimiere
max	maximiere
k	Variable/Index für die Nummer der (von 1 bis p durchnummerierten) DMUs - falls $k = 0$, so ist das die gerade betrachtete DMU
m	Anzahl der Inputs
n	Anzahl der Outputs
L	Untere Skalenertragsannahmen-Grenze im GRS-Modell
Q	Obere Skalenertragsannahmen-Grenze im GRS-Modell
p	Anzahl der DMUs
R^-	Range (Spannweite) für die Inputs
R^+	Range (Spannweite) für die Outputs
s, t	Skalare für die Berechnung der Punkte des effizienten Randes/Hülle oder Indices für die Koeffizienten u und v .
S	Schnittpunkt mit dem effizienten Rand
S^-	Input-Slack(variablen)vektor, besteht aus m Inputslack(variablen) s_i
S^+	Output-Slack(variablen)vektor, besteht aus n Outputslack(variablen) s_j
S_k^-	Input-Slack(variablen)vektor, besteht aus m Inputslack(variablen) s_i der DMU $_k$
S_k^+	Output-Slack(variablen)vektor, besteht aus n Outputslack(variablen) s_j der DMU $_k$
s_i^-	Input-Slack(variable) i
s_j^+	Output-Slack(variable) j
$s_{i,k}^-$	Input-Slack(variable) i der DMU $_k$
$s_{j,k}^+$	Output-Slack(variable) j der DMU $_k$
T	Technologie
U	Output-Koeffizientenvektor, besteht aus n u_j
V	Input-Koeffizientenvektor, besteht aus m v_i
U_k	Output-Koeffizientenvektor der DMU k
V_k	Input-Koeffizientenvektor der DMU k
u_j	Koeffizient j für den virtuellen Output / Multiplier Form
v_i	Koeffizient i für den virtuellen Input / Multiplier Form
$u_{j,k}$	Koeffizient j für den virtuellen Output der DMU k / Multiplier Form
$v_{i,k}$	Koeffizient i für den virtuellen Input der DMU k / Multiplier Form
X	Inputvektor, besteht aus m Inputfaktoren (x_i)
Y	Outputvektor, besteht aus n Outputfaktoren (y_j)
X_k	Inputvektor der DMU k
Y_k	Outputvektor der DMU k
x_i	Inputfaktor i

y_j	Outputfaktor j
$x_{i,t}$	Inputfaktor i der DMU k
$y_{j,k}$	Outputfaktor j der DMU k
$\hat{x}_{i,k}$	Logarithmisierte Inputfaktor i der DMU k
$\hat{y}_{j,k}$	Logarithmisierte Outputfaktor j der DMU k
W	Verschiebungsvektor, besteht aus m Verschiebungskonstanten w_i
w_i	Verschiebungskonstante im Beweis zur Translationsinvarianz für den Input i
Z	Verschiebungsvektor, besteht aus n Verschiebungskonstanten z_j
z_k	frei wählbare Korrekturvariable des BCC-Modells für die DMU k oder Verschiebungskonstante im Beweis zur Translationsinvarianz für den Output k (wobei dann mit dem Index j versehen)
λ_k	Koeffizient zur Bildung von (virtuellen) DMUs der DMU k
λ	frei wählbarer Koeffizient für die Skalenertragsannahmen
θ	(radialer, inputorientierter) Effizienzwert
η	(radialer, outputorientierter) Effizienzwert
ω	slackbasierter Effizienzwert
Γ	Effizienzwert des RAM-Modells
ε	non-Archimedean Variable, eine unendlich kleine Zahl größer 0
$\sum_{a=b}^c$	Summe (von a=b bis c)
$\prod_{a=b}^c$	Produkt (von a=b bis c)
$\log (...)$	Logarithmus von (...)
$\ln (...)$	Logarithmus Naturalis von (...)
$=$	gleich
$<$	kleiner als
$>$	größer als
\leq	kleiner/gleich als
\geq	größer/gleich als
\in	ist Element von

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Beispiel einer Technologie (T) für ein 1-Input/1-Output-Produktionssystem.....	4
Abbildung 2: Ausschnitte einer Produktionsfunktion.....	5
Abbildung 3: Performance Indikator/lineare Produktionsfunktion im 1-Input/1-Output-Fall.....	7
Abbildung 4: Technische Effizienz am 2-Input/1-Output-Fall.....	11
Abbildung 5: Skalenerträge für den 1-Input/1-Output-Fall.....	15
Abbildung 6: Beispiel für ein ST-Netz.....	26
Abbildung 7: Beispiel für eine Produktionsfunktion/Technologie und mögliche DMUs.....	32
Abbildung 8: Verschiedene Effizienzränder am Beispiel eines 1-Input/1-Outputfalles.....	35
Abbildung 9: Phase 1 - Grundsätzliche Eignung für die DEA?.....	53
Abbildung 10: Phase 2 - DEA-Modellauswahl.....	55
Abbildung 11: Phase 3 - Präferenzen, Modifikationen und Überprüfungen.....	60

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Überblick über die in dieser Arbeit behandelten DEA-Modelle.....	25
Tabelle 2: Annahmen der jeweiligen DEA-Modelle in Bezug auf die Technologien.....	37
Tabelle 3: 1-Input/3-Output-Fall für 2 DMUs mit Indexfaktor.....	43

1 Problemeinführung

Der Begriff „Data Envelopment Analysis“ (DEA) wurde erstmals von CHARNES/COOPER/RHODES im Jahr 1978 für ein Verfahren zum effizienzbasierten Leistungsvergleich von verschiedenen organisatorischen Einheiten eingeführt¹⁾. Dieses Verfahren, welches später nach den Autorennamen als CCR-Modell benannt wurde, ist heute nur eines von vielen Modellen²⁾, die zur DEA gezählt werden³⁾.

Prinzipiell werden bei der Anwendung der DEA verschiedene organisatorische Einheiten (sog. Decision Making Unit(s), kurz DMU(s)) mit ihren jeweiligen Produktionsprozessen verglichen. Dabei spielt der Produktionsprozess an sich keine Rolle, nur dessen Inputfaktoren (=Input(s)) und Outputfaktoren (=Output(s)) werden betrachtet. Eine effizientere DMU zeichnet sich dadurch aus, dass sie ein höheres Verhältnis von Outputs zu Inputs aufweist als eine zu vergleichende DMU⁴⁾.

Die DEA gehört zu den sog. Performance Measurement-Techniken⁵⁾ und ist insbesondere deshalb hervorzuheben, da es sich um einen nicht-parametrischen Ansatz handelt: Es können verschiedenartige Größen in den Effizienzvergleich miteinfließen, ohne sie im Vorfeld - z.B. monetär - bewerten zu müssen oder eine Produktionsfunktion aufzustellen. Bei anderen Ansätzen zur wirtschaftlich vergleichenden Leistungsbewertung ist dies oft der Fall, insbesondere dann, wenn die Komplexität des Leistungsvergleichs im Endeffekt auf eine Kennzahl reduziert werden soll⁶⁾.

Seit der Vorstellung des CCR-Modells sind weitere Modelle entwickelt worden, die verschiedene Schwerpunkte setzen und/oder Erweiterungen und Ergänzungen darstellen⁷⁾. Im CCR-Modell kann beispielsweise nur eine Aussage darüber getroffen werden, um wie viel Prozent eine DMU ihren Input **oder** Output verändern muss, um als effizient⁸⁾ zu gelten⁹⁾. Später wurden z.B. die sog. additiven Modelle entwickelt. Mit ihnen kann eine Aussage über die Verringerung der Inputs **und** die Erhöhung der Outputs getroffen werden, damit die betrachtete DMU ebenfalls als effizient gilt¹⁰⁾.

In der Literatur findet man vereinzelt Beschreibungen zur Auswahl eines DEA-Modells¹¹⁾, diese sind jedoch wenig strukturiert. Zudem werden die formalen Voraussetzungen nicht voll-

1) Vgl. GLEICH (1997) S. 116, SCHEFCZYK (1996) S. 168.

2) Im folgenden Text (wie auch schon in der Überschrift dieser Diplomarbeit) wird (DEA-)Modell und (DEA-)Variante synonym verwendet.

3) Vgl. EMROUZNEJAD (2004), SCHEFCZYK (1996) S. 171 f.

4) Vgl. RAMANATHAN (2003) S. 26, SCHEEL (2000) S. 2 f. - Auf die damit einhergehenden Annahmen wird in Kapitel 2 eingegangen.

5) Vgl. GLEICH (1997) S. 116.

6) Vgl. SCHEFCZYK (1996) S. 167 f.

7) Vgl. SCHEFCZYK (1994) S. 170 ff., EMROUZNEJAD (2004).

8) Auf den Effizienzbegriff wird in Kapitel 2 eingegangen.

9) Vgl. SCHEFCZYK (1994) S. 167 f.

10) Vgl. SCHEFCZYK (1994) S. 171.

11) Vgl. SCHEFCZYK (1994) S. 177 f., SCHEFCZYK (1996) S. 173 ff., KLEINE (2002) S. 210 ff., RAMANATHAN (2003) S. 175, COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 101 f.

ständig behandelt, so dass eine grobe Modellauswahl zwar anhand der aufgeführten Kriterien getroffen werden kann, jedoch nicht klar ist, ob auch wirklich alle Voraussetzungen erfüllt werden, die zur Anwendung des gewählten Modells oder generell zur DEA nötig sind. Daher wird in dieser Arbeit ein Vorgehensmodell entwickelt, welches die Auswahl einer DEA-Variante ermöglicht. Dabei steht die möglichst eindeutige und nachvollziehbare Auswahl im Vordergrund. Der Schwerpunkt des Vorgehensmodells liegt in der Berücksichtigung aller notwendigen Voraussetzungen, deren Erfüllung zur Anwendung der DEA-Modelle nötig sind. Erst wenn diese Bedingungen nicht einen eindeutigen Schluss auf eine DEA-Variante zulassen, können die möglichen Präferenzen des Anwenders im Hinblick auf die Eigenschaften des gewünschten Effizienzmaßes, welches sich aus dem DEA-Modell ergibt, eine Rolle spielen. Dies soll verhindern, dass evtl. im Vorfeld gebildete Präferenzen das Ergebnis verfälschen. Auf subjektive Entscheidungsspielräume des Anwenders¹²⁾ wird an gegebener Stelle hingewiesen, um so zu verdeutlichen, inwieweit die DEA und die Modellauswahl davon abhängt. Zudem werden modellunabhängige Modifikationen der DEA berücksichtigt, die einige der erarbeiteten Voraussetzungen aufweichen und gegebenenfalls widersprüchliche Ergebnisse zu korrigieren versuchen.

2 Grundlagen: Effizienz, DEA und Vorgehensmodell

2.1 Produktionsprozess

Im Mittelpunkt der DEA steht der Vergleich der DMUs¹³⁾. Dies ist jedoch nicht ganz korrekt, da nur die einzelnen Transformationsprozesse der DMUs verglichen werden. Nach DYCKHOFF¹⁴⁾ ist eine Transformation als eine Veränderung von Objekten definiert. *Objekte* können dabei materiell wie immateriell vorliegen, letztere umfassen beispielsweise Dienste, Rechte, Informationen aber auch Bildung und Sicherheit. Der Vorgang einer Transformation wird als *Transformationsprozess* bezeichnet und entspricht dann einer *Produktion*, wenn er „durch Menschen veranlasst und zielgerichtet gelenkt sich systematisch vollzieht und dabei mehr Werte schafft als vernichtet“¹⁵⁾. Dabei kann die Produktion als ein Input-/Output-Prozess aufgefasst werden, der Input in Output transformiert. Input(s) (oder Inputfaktoren) sind dabei Objekte, die von außen dem Produktionsprozess zur Durchführung zugeführt werden. Output(s) (oder Outputfaktoren) sind die aus dem Prozess resultierenden und nach außen abgegebenen Objekte. Im folgenden Text wird nicht zwischen Input und Inputs oder zwischen Output und Outputs unterschieden. Die Durchführung einer Produktion wird als Produktionsaktivität oder einfach nur Aktivität bezeichnet¹⁶⁾. Dies umfasst den zeitlichen Aspekt

12) In dieser Arbeit wird der Einfachheit halber der Begriff „Anwender“ verwendet. Er bezieht sich sowohl auf eine Anwenderin als auch auf einen Anwender.

13) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1978) S. 429.

14) Zu den folgenden Ausführungen vgl. DYCKHOFF (1994) S. 5 ff.

15) DYCKHOFF (1994) S. 7.

16) Vgl. Dyckhoff (1994) S. 47.

(Transformationsprozesse erfordern Zeit¹⁷⁾), der jedoch zunächst keine Rolle spielt¹⁸⁾. Wenn verschiedene Aktivitäten verglichen werden, so wird vorausgesetzt, dass sie jeweils die gleiche Zeitperiode benötigen. Produktionsaktivitäten sind durch ihre Input- und Outputquantitäten gekennzeichnet¹⁹⁾, die üblicherweise als Kombination von Vektoren (Inputvektor X , Outputvektor Y^{20}) notiert werden; der eigentliche Prozess wird in den folgenden Ausführungen nicht betrachtet. Im Folgenden werden die Begriffe Prozess und dessen Produktionsaktivität synonym verwandt, wenn diese verglichen werden. Zudem sei noch angemerkt, dass in dieser Arbeit der Verbrauch von Inputfaktoren mit positiven Zahlen dargestellt wird. Bis auf weiteres werden nur Objekte betrachtet, die als Gut angesehen werden. Ein Gut ist ein Objekt, über das man verfügen möchte (und das daher üblicherweise knapp ist) und einen positiven Gebrauchs- oder Tauschwert besitzt²¹⁾.

Die Unternehmung oder eines ihrer Subsysteme (z.B. Werk, Filiale, Produktionsanlage, Baustelle, Arbeitsplatz), welche eine Produktion vornimmt, wird als Produktionssystem bezeichnet²²⁾. Die DMUs entsprechen so im weiteren Sinne Produktionssystemen.

Um jedoch von diesen ökonomisch geprägten Begrifflichkeiten zu abstrahieren, führten CHARNES/COOPER/RHODES den Begriff der DMUs ein, da sie damit deutlich machen wollten, dass die DEA auch für nicht (rein) wirtschaftliche Bereiche geeignet ist. Ursprünglich war der Non-Profit-Bereich sogar der Mittelpunkt des Interesses bei der Veröffentlichung des ersten DEA-Modells²³⁾.

2.2 Technologie und Produktionsfunktion

Zum Verständnis des DEA-Prinzips werden noch weitere Begriffe aus der Produktionstheorie²⁴⁾ prinzipiell²⁵⁾ erklärt.

Mit der *Technologie*²⁶⁾ T wird die Menge aller grundsätzlich möglichen Produktionsaktivitäten bezeichnet. In ihr implizit enthalten sind somit das technische und organisatorische Wissen des Produktionssystems²⁷⁾. Für den sehr einfachen Fall eines Produktionssystems mit nur ei-

17) Vgl. DYCKHOFF (2003) S. 26.

18) Zu den zeitlichen Aspekten in der DEA siehe Kapitel 3.1.

19) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 48.

20) Vgl. SCHEEL (2000) S. 38, SCHEFCZYK (1996) S. 169.

21) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 123, das Gegenteil ist ein Übel - siehe Kapitel 3.3.7.

22) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 11.

23) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1978) S. 429.

24) Die Produktionstheorie umfasst die rationale Beschreibung des Produktionswirkungsbereichs der Unternehmung (vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 163). Sie wird auch als „Theorie der Produktionswirtschaft“ bezeichnet (vgl. DYCKHOFF (2003) S.9).

25) Die nachfolgenden Ausführungen dienen nur zur groben Einordnung der Begriffe und Zusammenhänge und sind speziell im Hinblick auf die DEA erklärt.

26) Auch als „Technik“ (vgl. DYCKHOFF (2003) S. 56 und 11), „Technologiemenge“ (SCHEEL (2000) S. 38) oder in der englischsprachigen Literatur als „production technology“ (vgl. FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985) S. 23) oder „production possibility set“ (vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 42, THANASSOULIS (2001) S. 10, SCHEFCZYK (1996) S. 169) bezeichnet. Eine Unterscheidung von Technologie und Produktionsmöglichkeitsmenge wie DYCKHOFF (1994) S. 47 sie vorschlägt, spielt in dieser Arbeit keine Rolle.

27) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 47.

nem Input- und einem Outputfaktor (x bzw. y) kann beispielsweise die Technologie als schraffierter Bereich der Abbildung 1 grafisch dargestellt werden, wenn davon ausgegangen wird, dass alle Produktionsaktivitäten möglich sind, die ein Vielfaches einer anderen möglichen Aktivität darstellen. Zudem wird angenommen, dass alle Produktionsaktivitäten, die mehr Input oder weniger Output benötigen als eine andere Aktivität, ebenfalls realisierbar sind²⁸⁾²⁹⁾.

Der Punkt A (x_A, y_A) gehört somit nicht zur Technologie, während B (x_B, y_B) und C (x_C, y_C) jeweils mögliche Produktionsaktivitäten darstellen.

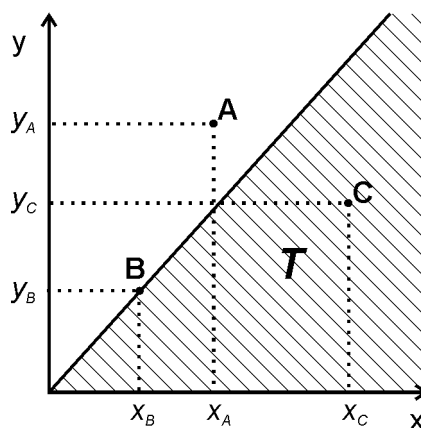


Abbildung 1: Beispiel einer Technologie (T) für ein 1-Input/1-Output-Produktionssystem

In Anlehnung an DYCKHOFF (1994) S.95.

Die *Produktionsfunktion* gibt an, welche Input(faktor)mengen mindestens verbraucht werden, wenn eine bestimmte Outputmenge hergestellt werden soll. Anders ausgedrückt: Sie gibt die höchste Outputmenge an, die mit einer gegebenen Inputmenge produziert werden kann³⁰⁾. Eine - im technischen Sinne - Verschwendung von Inputs oder Outputs ist dabei ausgeschlossen. Sog. „freie“ Güter, d.h. Güter ohne oder mit einem Preis von Null werden wegen der ökonomischen Bedeutungslosigkeit üblicherweise weggelassen³¹⁾. Für das Beispiel aus Abbildung 1 ist die grafische Darstellung der Produktionsfunktion somit der „semi-positive“³²⁾ Teil der Geraden, die durch den Ursprung und den Punkt B verläuft. Vorerst wird idealisierend davon ausgegangen, dass alle Faktorenmengen (im Folgenden wird „Faktor(en)“ synonym mit „Input-/Outputfaktor(en)“ benutzt) beliebig teilbar sind und das Teilstück der Geraden somit stetig³³⁾ ist, obwohl sie nur aus einzelnen Punkten möglicher Produktionsaktivitäten be-

28) Vgl. VARIAN (1994) S. 6 - Varian spricht von der „kostenlosen Beseitigung“ - siehe auch die Definition von der freien Verschwendbarkeit („free disposability“) in Kapitel 3.2.2.

29) Für eine weitergehende, insbesondere formale Definition sei auf bspw. SHEPHARD (1970) S. 13 ff. verwiesen, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

30) Vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 163 f., PINDYCK/RUBINFELD (2003) S. 263. Weitere Erläuterungen siehe Kapitel 2.2.2.

31) Dies gilt natürlich nur bis zu dem Zeitpunkt, an dem die Güter einen Preis durch Knappheit erhalten.

32) Hiermit ist nur das Teilstück der Geraden gemeint, welches ausschließlich Input-/Outputquantitäten ≥ 0 darstellt.

33) Der Stetigkeitsbegriff wird in Kapitel 3.3.1 erläutert.

steht³⁴). Dies entspricht zwar nicht der Realität, eine hinreichende Approximation erscheint jedoch gegeben, wenn ausreichend viele Produktionsaktivitäten auf der Geraden liegen³⁵. Für Produktionssysteme mit drei Faktoren (1-Input/2-Outputs oder 2-Inputs/1-Output) kann eine solche Funktion jedoch nur noch dreidimensional grafisch dargestellt werden („Ertragsgebirge“ - für ein Beispiel siehe Anhang 1)³⁶. Eine Projizierung in den zweidimensionalen Raum ist durch die Festlegung des Input- bzw. Outputwertes möglich, wobei nur noch ein Ausschnitt der Produktionsfunktion repräsentiert werden kann³⁷. Für beide Fälle ist dies beispielhaft in Abbildung 2 dargestellt.

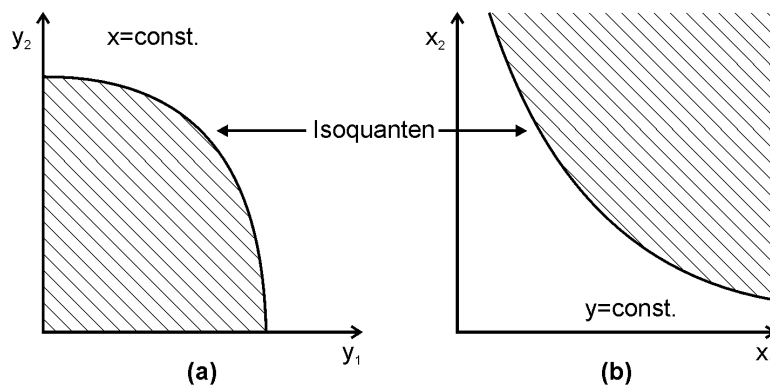


Abbildung 2: Ausschnitte einer Produktionsfunktion

(a) für den 1-Input/2-Output-Fall, (b) für den 2-Input/1-Output-Fall bei jeweils konstant vorgegebener Input- bzw. Outputmenge.

In Anlehnung an FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1994) S. 26ff.

In Abbildung 2 geben die schraffierten Bereiche an, welche Outputmengen bei vorgegebenem Input (a) oder welche Inputmengen für die Herstellung einer vorgegebenen Outputmenge (b) möglich sind. Die Linie der maximalen Outputkombinationen bzw. der minimalen Inputkombinationen werden als Isoquante bezeichnet³⁸. Bei diesen Technologien wird davon ausgegangen, dass die jeweiligen Faktoren substituierbar³⁹ sind. Andernfalls wäre es beispielsweise im Fall (b) nicht möglich, dass eine Erhöhung von x_2 zu einer Verringerung von x_1 führt, obwohl immer noch die gleiche Outputmenge produziert wird.

34) Vgl. KOOPMANS (1951) S. 49.

35) Vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 164 ff., VARIAN (1994) S.10. Für die DEA siehe Kapitel 3.3.1.

36) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 53.

37) Vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 166.

38) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 106, PINDYCK/RUBINFELD (2003) S. 264. In dieser Arbeit wird nicht zwischen einer Kapazitätslinie (Abbildung 2 (a) und einer Isoquante unterschieden, wie es bspw. FEHL/OBERENDER (2002) S. 166 und S. 256 vornehmen.

39) Zwei Inputfaktoren sind substituierbar, wenn von einem Input weniger und von einem anderen Input mehr benötigt wird, um die gleiche Outputmenge(n) zu transformieren. Für Outputs gilt dies entsprechend. Vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 164.

2.2.1 Allgemeiner Effizienzbegriff und DEA Effizienz

2.2.2 Effizienz

Im Allgemeinen ist der Begriff „Effizienz“ oder das Adjektiv „effizient“ mit etwas „Gutem“ verbunden⁴⁰⁾. Im Duden findet man dazu Begriffe wie „besonders wirksam“ und „wirtschaftlich“⁴¹⁾, wobei Ersteres eine Ableitung von dem lateinischen Verb „efficiere“ (bewirken) ist⁴²⁾. Meist wird „effektiv“ umgangssprachlich synonym verwandt⁴³⁾. Eine Abgrenzung dazu findet in der Literatur selten statt⁴⁴⁾. In der ISO 9000:2000-Norm, einer Norm zum Qualitätsmanagement, wird „Effektivität“ („effectiveness“) als „Ausmaß, in dem geplante Tätigkeiten verwirklicht und geplante Ergebnisse erreicht werden“⁴⁵⁾ definiert. Nach derselben Norm wird dagegen „Effizienz“ als „Verhältnis zwischen dem erreichten Ergebnis und den eingesetzten Ressourcen“ beschrieben⁴⁶⁾. Dies entspricht der Produktivität. Eine Gleichsetzung dieser Begriffe ist üblich⁴⁷⁾. Für den Fall eines wirtschaftlichen Prozesses mit nur einem Output und einem Input kann dazu einfach der Quotient gebildet werden⁴⁸⁾:

$$\text{Effizienz} = \text{Produktivität} = \frac{\text{Output}}{\text{Input}} \quad (1)$$

Diese Zahl allein hat jedoch - unabhängig von den Input-/Outputgrößen - keinen Aussagewert bezüglich der Effizienz. Erst wenn ein Wertmaßstab hinzugezogen wird, ist es möglich, eine Aussage über die Effizienz zu treffen. Dadurch wird deutlich, dass Effizienz oder Effizienzaussagen stets relativ sind⁴⁹⁾.

Eine Möglichkeit für einen Wertmaßstab ist der Vergleich untereinander, d.h. es werden verschiedene, gleichartige⁵⁰⁾ Prozesse auf Basis ihrer Produktivitäten verglichen. Hierbei sei angemerkt, dass bis auf weiteres davon ausgegangen wird, dass die Input- und Outputfaktoren jeweils einen positiven Wert haben, d.h. dass das Bestreben der Produktionssysteme vorliegt, ausnahmslos alle Inputfaktoren zu minimieren und ausnahmslos alle Outputfaktoren zu maximieren. Wegen des Anspruchs der DEA, auch für nicht wirtschaftliche Untersuchungen geeignet zu sein, wird daher nicht mehr von einem Gut, sondern von „gewünschten“ Input(-) oder Output(faktoren) gesprochen.

Durch die Bildung von Quotienten der Produktivitäten kann ein vergleichendes Maß berechnet werden, das angibt, um welchen Multiplikatorwert ein Prozess weniger oder mehr⁵¹⁾ effi-

40) Vgl. KLEINE (2002), S. 1.

41) Vgl. SCHOLZE-STUBENRECHT/EICKHOFF/HALLER-WOLF (1997) S. 214.

42) Vgl. BOHR (1993) S. 855.

43) Vgl. BOHR (1993) S. 855.

44) Vgl. z.B. DRUMM (2000) S. 10 - mit Ausnahme der Literatur zur „Öffentlichen Betriebswirtschaft“.

45) Vgl. EN ISO 9000 o.V. (2000) S. 22.

46) Vgl. EN ISO 9000 o.V. (2000) S. 22.

47) Vgl. BOHR (1993) S. 866, RAMANATHAN (2003) S. 26, SCHEEL (2000) S. 3, CHARNES/COOPER/RHODES (1977) S. 9.

48) Vgl. SCHEEL (2000) S. 3.

49) Vgl. SCHEEL (2000) S. 3.

50) D.h. die Prozesse müssen den gleichen Inputfaktor in den gleichen Outputfaktor transformieren.

51) Unter der im Satz vorher genannten Bedingung bedeutet dies, dass eine höhere Produktivitäts-

zient ist als der andere. THANASSOULIS nennt eine solche Zahl einen *Performance Indikator* (PI)⁵²⁾. Für den eindimensionalen Fall und bei der Division von der geringeren Produktivität durch die höhere kann eine Prozentzahl als PI ermittelt werden. Durch Subtraktion von 1 wird berechnet, um wie viel Prozent der weniger effiziente Prozess seinen Input verringern muss (bei gleichbleibenden Outputs), um die gleiche Produktivität (und demnach dessen Effizienz) zu erreichen⁵³⁾. Falls mehrere Prozesse verglichen werden, kann dies im Verhältnis zu dem Prozess mit der höchsten Produktivität („Best Practice(-Prozess)“) geschehen. Der Performance Indikator liefert somit einen quantitativen „Abstand“ zu diesem Wertmaßstab (als Darstellung im 1-Input/1-Output-Fall wird dieser Wertmaßstab auch „Best Practice-Gerade“ genannt)⁵⁴⁾. Bei dieser Betrachtungsweise wird implizit davon ausgegangen, dass alle Produktionsaktivitäten möglich sind, die die gleiche Produktivität aufweisen, wie der Best Practice-Prozess⁵⁵⁾.

Wenn nun davon ausgegangen wird, dass der Best Practice-Prozess auf einer linearen Produktionsfunktion liegt, so kann dieses Verfahren auf Technologien und die zugehörige Produktionsfunktion übertragen werden. Genau genommen ist es sogar möglich, auf Grund einer vorliegenden, linearen Produktionsfunktion einen möglichen Best Practice-Prozess zu bestimmen, wenn einfach ein beliebiger Punkt der Produktionsfunktion als solcher benutzt wird. In dem Beispiel der Abbildung 1 entspricht somit der Punkt B dem Best Practice-Prozess. Ein ineffizienter Prozess ist somit durch Punkt C dargestellt.

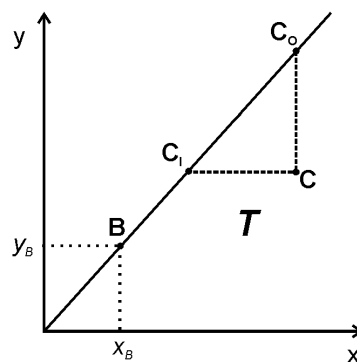


Abbildung 3: Performance Indikator/lineare Produktionsfunktion im 1-Input/1-Output-Fall

In Anlehnung an DYCKHOFF (1994) S. 95.

In Abbildung 3 ist dieser Fall nochmals aufgenommen. Der Punkt C_1 stellt die effiziente Produktionsaktivität dar, die durch Reduzierung des Inputs erreicht wird⁵⁶⁾. Die reduzierte Inputmenge kann durch Multiplikation mit dem Performance Indikator (Berechnung wie oben beschrieben) bestimmt werden, die Strecke $\overline{CC_1}$ durch Multiplikation mit $(1-PI)$. Der Punkt C_0 stellt entsprechend die effiziente Produktionsaktivität bei Outputerhöhung dar.

zahl als effizienter und somit als „besser“ anzusehen ist.

52) Vgl. THANASSOULIS (2001) S. 5 f.

53) Vgl. SCHEEL (2000) S. 5 f.

54) Vgl. SCHEEL (2000) S. 6.

55) Vgl. SCHEEL (2000) S. 38.

56) Ausgehend von Punkt C.

Anzumerken ist noch, dass gemäß der vorgestellten Definition zur Technologie ein Vergleich von verschiedenen Produktionssystemen nicht zulässig ist, da diese jeweils nur für ein Produktionssystem definiert sind. Daher wird davon ausgegangen, dass alle Produktionsprozesse - auch von verschiedenen Produktionssystemen - die gleiche Technologie besitzen⁵⁷⁾.

Die Benutzung einer Produktionsfunktion als Wertmaßstab zur Effizienzbestimmung ist bspw. durch die Definition von DYCKHOFF⁵⁸⁾ begründet. Demnach ist eine Produktionsfunktion als „effizienter“ Rand⁵⁹⁾ einer Technologie definiert. Dieser wird durch alle Punkte gebildet, die nicht dominiert sind, d.h. bei denen bei sonst gleichbleibenden Bedingungen (*ceteris paribus*) kein Punkt existiert, der einen geringeren Input oder einer höheren Output aufweist⁶⁰⁾. Dies entspricht dem sog. Pareto-Koopmans-Effizienzbegriff, auf den später noch näher eingegangen wird⁶¹⁾. Die in Kapitel 2.2 eingeführte Definition einer Produktionsfunktion ist nur eine andere Formulierung zu der von DYCKHOFF, da die Verschwendung von Inputs und/oder Outputs ausgeschlossen wird und somit diese Punkte ebenfalls nicht dominiert werden.

Technische Effizienz und Preiseffizienz

Falls eine Produktionsfunktion (oder eine entsprechende Technologie) vorliegt, kann somit auch bei mehreren Inputs oder Outputs entschieden werden, ob ein Prozess effizient ist oder nicht. Sobald jedoch die Input- bzw. Outputfaktoren unterschiedliche Wertigkeiten (=Preise) besitzen oder nicht wertmäßig erfasst werden können, weil es bspw. keinen Markt dafür gibt, ist ein rein mengenmäßiger Produktivitätsvergleich nicht aussagefähig⁶²⁾. FARRELL⁶³⁾ unterscheidet daher zwischen der rein mengenmäßigen *technischen Effizienz* („technical efficiency“), die in Bezug auf den Rand⁶⁴⁾ der Technologie (im Sinne der Produktionsfunktion) definiert ist⁶⁵⁾ und der *Preiseffizienz* („price efficiency“), die bei gegebenen Preisen die preisoptimale Produktionsaktivität auf eben dieser Produktionsfunktion als Bezugspunkt nutzt. Das Produkt aus Preis- und technischer Effizienz ergibt für Farrell die Gesamteffizienz („overall efficiency“). Demnach ist die technische Effizienz eine notwendige, aber generell nicht hinreichende Bedingung für die Gesamteffizienz⁶⁶⁾.

FARRELL erkannte aber auch, dass die von ihm vorgestellte Preiseffizienz sehr anfällig ge-

57) Vgl. SCHEEL (2000) S. 38. Siehe auch Kapitel 3.1.

58) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 89 ff.

59) Ein Randpunkt der Technologie ist dadurch definiert, dass in jeder noch so kleinen Umgebung Punkte außerhalb der Technologie liegen (vgl. DYCKHOFF (1994) S. 90).

60) Vgl. DYCKHOFF (2003) S. 138. Mathematisch genau wird dies auf S. 11 formuliert.

61) Vgl. KOOPMANS (1951) S. 60 ff., SCHEEL (2000) S. 62.

62) Vgl. BOHR (1993) S. 866. Falls aber alle Inputs und Outputs wertmäßig erfassbar sind, kann die Produktivitätsgleichung um die Multiplikation mit den jeweiligen Preisen (=Werten) ergänzt werden. Die daraus resultierende „Produktivitätskennziffer“ wird auch „(wertmäßige) Wirtschaftlichkeit“ genannt.

63) Vgl. FARRELL (1957) S. 254 f.

64) Bei mehrdimensionalen Inputs/Outputs wird die Technologie durch eine mehrdimensionale Hyperebene (Oberfläche, auch Hülle) begrenzt (vgl. SCHEFCZYK (1994) S. 154). Im Folgenden werden diese Begriffe synonym benutzt, um nicht zwischen ein- und mehrdimensionalen Betrachtungen unterscheiden zu müssen.

65) Der Begriff „technische“ Effizienz“ wird weiter unten noch präzisiert.

66) Vgl. auch CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000A) S. 264.

genüber Fehlern bei der Preisermittlung oder bei Preisänderungen ist, da selbst bei geringen Abweichungen ein völlig anderer Punkt auf der Produktionsfunktion als neuer Bezugspunkt dienen kann⁶⁷⁾. Zudem ist die Preiseffizienz nur rein statisch zu sehen, da die Änderung des Input-/Outputmixes eines Produktionssystems - z.B. um effizienter zu werden - auch eine Preisänderung auf Grund der veränderten Angebots-/Nachfragesituation nach sich ziehen kann⁶⁸⁾. Ebenso entstehen Probleme durch unterschiedliche Informationen über Preise, z.B. weil ein Prozess in Erwartung auf bestimmte oder auf bereits nicht mehr aktuelle Preise ausgerichtet wurde⁶⁹⁾. Der grundlegende Ansatz der DEA beinhaltet daher keine Preiseffizienz, sondern nur die technische Effizienz⁷⁰⁾.

Erzeugung von Technologien und Produktionsfunktionen

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, die als Wertmaßstab dienende Produktionsfunktion oder deren zu Grunde liegende Technologie zu bestimmen. Grundsätzlich kann hierbei zwischen parametrischen und nicht-parametrischen Ansätzen unterschieden werden⁷¹⁾. Im erstgenannten Fall wird davon ausgegangen, dass ein im Vorhinein festgelegter funktionaler Zusammenhang zwischen den Input- und Outputfaktoren besteht⁷²⁾.

Bekannt ist dies z. B. bei der Bestimmung der Effizienz von Wärmekraftwerken in den Ingenieurwissenschaften. Dort wird der Wirkungsgrad⁷³⁾ von Wärmekraftwerken berechnet⁷⁴⁾, indem die Effizienz in Bezug auf festgestellte Gesetzmäßigkeiten bestimmt wird⁷⁵⁾. Als Grundlage dient der sog. Carnot-Prozess, der einen idealtypischen - also theoretischen - Grundprozess der Thermodynamik darstellt. Dieser dient als Bezugsfunktion für die Beurteilung der Kraftwerke⁷⁶⁾. Vereinfacht ausgedrückt wird die Energieerzeugung eines Wärmekraftwerkes ins Verhältnis zur Energieerzeugung aus einem mit dem gleichen Input gespeisten Carnot-Prozess gesetzt und ergibt somit den Wirkungsgrad/die Effizienz dieses Kraftwerks⁷⁷⁾.

Diese Sichtweise wird auf die parametrischen Ansätze übertragen. Dazu ist jedoch die Festlegung auf eine Form der Produktionsfunktion notwendig⁷⁸⁾. Für den 1-Output-Fall werden nach LOVELL überwiegend die Cobb-Douglas-Funktionen benutzt⁷⁹⁾. Er stellt zudem mehrere Methoden vor, die mit Hilfe der aus vergangenen Produktionsprozessen gewonnenen Daten die Parameter der Funktion schätzen⁸⁰⁾. Dabei gibt es zum Teil Variablen für Messfehler und

67) Vgl. FARRELL (1957) S. 260 f.

68) Vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 13 ff.

69) Vgl. FARRELL (1957) S. 261.

70) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1977) S. 10.

71) Vgl. FØRSUND/LOVELL/SCHMIDT (1980) S. 7 f.

72) Vgl. SCHEEL (2000) S. 50.

73) Der Wirkungsgrad ist nach WIKIPEDIA (2004A) als Verhältnis von Nutzen zu Aufwand definiert und entspricht somit der Effizienz ISO 9000:2000-Definition (siehe S. 6 dieser Arbeit).

74) Vgl. HEUCK/DETTMANN (1995) S. 5 ff.

75) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1978) S. 431 f.

76) Vgl. WIKIPEDIA (2004B), PELTE (2002A), PELTE (2002B).

77) Vgl. WIKIPEDIA (2004A).

78) Vgl. FØRSUND/LOVELL/SCHMIDT (1980) S. 9 ff., SCHEEL (2000) S. 51.

79) Vgl. LOVELL (1993) S. 21.

80) Vgl. LOVELL (1993) S. 21 ff.

Ineffizienzen, die jedoch nur ungenau bestimmt werden können⁸¹⁾.

Während ein naturwissenschaftliches Gesetz bis zum Beweis des Gegenteils als allgemeingültig anerkannt wird, ist anzuzweifeln, ob die oft auf Daten aus der Vergangenheit basierenden und geschätzten Produktionsfunktionen eine ausreichend genaue Approximation der Realität zur Bestimmung von Effizienzen bieten. Schließlich werden dabei implizite Annahmen über die zu Grunde liegende Technologie vorgenommen, die sich als falsch erweisen können⁸²⁾. Zudem verändert sich bspw. durch den technischen Fortschritt die Menge der möglichen Produktionsaktivitäten. Allein daher sind solche Funktionen nur für eine begrenzte Dauer oder durch ständige Neuberechnung mit den aktuell beobachteten Daten gültig. Darüber hinaus werden „Durchschnitte“ gebildet, die eben auch ineffiziente Produktionsaktivitäten mit in die Berechnung der Parameter einfließen lassen und somit zu Verzerrungen führen können. Dies hat jedoch den Nebeneffekt, dass stochastische Datenschwankungen nicht so großen Einfluss haben wie in nicht-parametrischen Ansätzen⁸³⁾.

Zu den nicht-parametrischen Ansätzen zählt die DEA, die nach THANASSOULIS sogar die „Hauptmethode“ darstellt⁸⁴⁾ und deren erstes Modell im folgenden Abschnitt dargestellt wird.

2.2.3 Grundprinzip der DEA anhand des CCR-Modells

Grundprinzip der DEA ist es, zur Effizienzbeurteilung eine Technologie durch die zu untersuchenden Prozesse - ab nun DMUs genannt⁸⁵⁾ - selbst zu erzeugen. Dies geschieht beim CCR-Modell, indem eine konvexe Hülle⁸⁶⁾ der nicht dominierten DMUs zur Abgrenzung der Produktionsmöglichkeitsmenge herangezogen wird, die die weniger effizienten DMUs „einhüllt“ - daher der Name „Data Envelopment Analysis“⁸⁷⁾. In Abbildung 4 ist der 2-Input/1-Output-Fall illustriert (wobei diese Abbildung nur einen Schnitt durch die eigentlich dreidimensional darzustellende Technologie abbilden kann).

Die Punkte A bis E in Abbildung 4 stellen die nicht-dominierten DMUs dar, die den Rand der betrachteten Technologie definieren und somit auch effiziente von ineffizienten DMUs trennen (der Punkt H hat den selben x_2 -Wert wie E und wird als Spezialfall weiter unten erläutert). Der Punkt G wird zwar ebenfalls nicht dominiert, aber auf Grund der Konvexitätsanforderung gehört er nicht zum effizienten Rand im Sinne der DEA. Somit wird eine „best practice“-Produktionsmöglichkeitsmenge bestimmt, anhand derer die Effizienz gemessen wird⁸⁸⁾.

81) Vgl. SCHMIDT (1976) S. 239.

82) Vgl. BANKER (1984) S. 36.

83) Vgl. SCHEEL (2000) S. 51 f.

84) Vgl. THANASSOULIS (2001) S. 9: „main method“. Generell vgl. bspw. SCHEFCZYK (1994) S. 154, SENGUPTA (1989) S. 40, SCHEEL (2001) S. 400.

85) Siehe dazu Kapitel 2.1. Zum Teil wird auf die Begriffe Produktions- oder Transformationsprozess zurückgegriffen, wenn diese den theoretischen Hintergrund besser umschreiben.

86) Die „konvexe Hülle“ wird in Kapitel 3 noch näher erläutert. Grundsätzlich bedeutet sie, dass jede Konvex-Kombination aus mehreren DMUs auch wieder Bestandteil der Technologie sein muss und somit eine Hülle (in dieser Arbeit synonym „(effizienter) Rand“) um alle DMUs gebildet wird.

87) Vgl. RAMANATHAN (2003) S. 32.

88) Vgl. SCHEFCZYK (1996) S. 168.

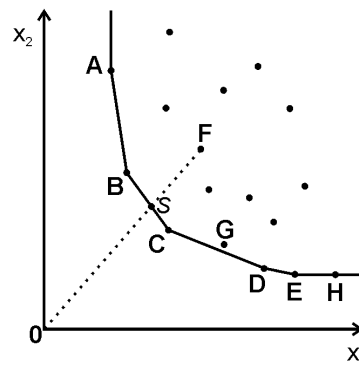


Abbildung 4: Technische Effizienz am 2-Input/1-Output-Fall

Die Punkte stellen Produktionsaktivitäten dar, die jeweils angeben, welche Mengen der Inputs x_1 und x_2 benötigt werden, um die selbe Outputmenge zu erstellen.

In Anlehnung an COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 7.

Dies führt jedoch auch dazu, dass nur eine Aussage über die „relative Effizienz“ gemacht werden kann⁸⁹⁾, d.h. dass eine DMU dann effizient ist, wenn im Vergleich zu anderen DMUs keine Anhaltspunkte für Ineffizienz vorliegen⁹⁰⁾.

CHARNES/COOPER/RHODES ist es 1978 gelungen⁹¹⁾ die grundlegende Idee von FARRELL⁹²⁾ aufzunehmen und ein mathematisches Modell zu erstellen, welches unterschiedliche Einheiten bei Input- und Outputfaktoren einbeziehen kann und einen aggregierten Effizienzwert liefert. Dies hatte FARRELL nicht erreicht⁹³⁾. Sie beziehen sich dabei nur auf den von ihm benutzten Begriff der technischen Effizienz⁹⁴⁾: X sei ein Inputvektor und Y ein Outputvektor, d.h. die Vektoren repräsentieren die jeweiligen Mengen der Inputwerte x_1, \dots, x_m bzw. der Outputwerte y_1, \dots, y_n . Ein Prozess (X, Y) ist dann technisch effizient, wenn es keinen Prozess (X', Y') gibt, für den $X' \leq X$, $Y' \geq Y$ gilt und zudem mindestens ein beliebiger Input- oder Outputwert die strikte Ungleichung erfüllt⁹⁵⁾. Dies entspricht dem Pareto-Koopmans-Effizienzbegriff und ebenso dem Begriff der nicht-dominierten Produktionsprozesse nach DYCKHOFF⁹⁶⁾.

Unter der Bedingung konstanter Skalenerträge - im 1-Input/1-Output-Fall entspricht das der Annahme einer linearen Produktionsfunktion, eine genauere Erklärung zu Skalenertragsannahmen wird in Kapitel 2.2.3.2 gegeben - kann zur Veranschaulichung die Abbildung 4 herangezogen werden. Der Punkt F ist technisch ineffizient, weil er von den Punkten B und C dominiert wird (im Sinne der DEA reicht aber auch die Dominierung durch einen Punkt, der durch die Kombination von Punkten (DMUs) erzeugt wird (siehe unten), aus - in der Grafik

89) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1977) S. 1.

90) Vgl. SCHEFCZYK (1996) S. 169.

91) Wobei nach FØRSUND/SARAFOGLOU (2002) S. 31 dieser mathematische Ansatz bereits 1971 von Boles vorgestellt wurde.

92) Vgl. FARRELL (1957) S. 253 ff.

93) Vgl. FARRELL (1957) S. 253 ff., CHARNES/COOPER/RHODES (1977) S. 6, FØRSUND/SARAFOGLOU (2002) S. 32.

94) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1977) S. 10 f.

95) Vgl. SCHEEL (2000) S. 63.

96) Vgl. KOOPMANS (1951) S. 66 ff., DYCKHOFF (1994) S. 89 ff., THANASSOULIS (2001) S. 32 f., CHARNES/COOPER (1985) S. 72.

entspricht dies einem beliebigen Punkt einer der Verbindungslinien). Farrell definierte für diesen Fall die technische (In-)Effizienz als den Quotienten aus der Länge der Strecke zwischen dem Ursprung 0 und dem Schnittpunkt S (S ist der Schnittpunkt der Geraden die durch B,C und 0,F verlaufen⁹⁷⁾) und der Strecke \overline{OF} ⁹⁸⁾: $\overline{OS}/\overline{OF}$. Der Schnittpunkt S kann als Konvex-Kombination der Punkte B und C ausgedrückt werden (B,C als Vektoren, s,t als Skalare): $S=s*B+t*C$, wobei $s,t \geq 0$ und $s + t = 1$ gilt⁹⁹⁾. In diesem konkreten Fall kann auch von der „technischen Input Effizienz“ gesprochen werden, da sich die Berechnung auf die Inputwerte bezieht¹⁰⁰⁾. Dieser Wert gibt an, auf wie viel Prozent die Inputs der DMU F simultan gesenkt werden müssen, um bei gleichbleibenden Outputs als effizient zu gelten. Wenn der Kehrwert von dieser Zahl gebildet wird, gibt das den benötigten Outputerhöhungsmultiplikator bei gleichbleibenden Inputs an¹⁰¹⁾. Aber nur beim CCR-Modell ist eine solche Umrechnung möglich. Daher wird im Generellen nicht nur nach den verschiedenen Modellen, sondern auch noch nach der *Orientierung* dieser Modelle unterschieden. Die Orientierung gibt an, ob bei der Berechnung der Ineffizienzwerte, die Inputs minimiert, die Outputs maximiert oder Inputs- und Outputs „simultan“¹⁰²⁾ optimiert werden. Dementsprechend wird von Input-, Output- oder unorientierten Modellen gesprochen¹⁰³⁾. Somit gibt es ein inputorientiertes und ein outputorientiertes CCR-Modell¹⁰⁴⁾.

Das Grundprinzip¹⁰⁵⁾ des Modells von CHARNES/COOPER/RHODES¹⁰⁶⁾ basiert auf der Berechnung der Effizienz mit Hilfe virtueller Inputs und Outputs, die durch Aufsummierung der einzelnen Output- (y_1, \dots, y_n) / Inputwerte (x_1, \dots, x_m) mit - bisher unbekanntem - Koeffizienten/Gewichten ($u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$) als Multiplikatoren gebildet werden (θ ist ein Skalar, der jedoch nur die technische Effizienz angibt - nähere Erläuterungen folgen):

$$\text{Effizienz } \theta = \frac{\text{virtueller Output}}{\text{virtueller Input}} = \frac{u_1 * y_1 + u_2 * y_2 + \dots + u_n * y_n}{v_1 * x_1 + v_2 * x_2 + \dots + v_m * x_m} \quad (2)$$

Das Besondere an diesem Ansatz ist, dass die Koeffizienten nicht im Vorfeld festgelegt, sondern durch die Daten selbst bestimmt werden und unabhängig von den Einheiten der zu multiplizierenden Werte sind. Dazu werden zu jeder einzelnen DMU_k ($k = 1, \dots, p$; für p als

97) Allgemein: S ist der Schnittpunkt mit dem effizienten Rand der Technologie und der Gerade von dem zu betrachtenden Punkt zum Ursprung hin.

98) Vgl. FARRELL (1957) S. 254.

99) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1977) S. 14, THANASSOULIS (2001) S. 27. Hier ist jedoch anzumerken, dass $s + t = 1$ nur deshalb erfüllt werden muss, da sonst ein anderes Outputlevel erzeugt werden würde, welches zwar möglich ist aber nicht in einer 2-dimensionalen Grafik dargestellt werden kann.

100) Vgl. THANASSOULIS (2001) S. 34.

101) Vgl. RAMANATHAN (2003) S. 28 ff. Dies bezieht sich jedoch nach wie vor auf die Bedingungen der konstanten Skalenerträge.

102) Hierbei ist die Optimierung sowohl der Inputs- als auch der Outputs in einem Berechnungsschritt gemeint.

103) Vgl. SCHEFCZYK/GERPOTT (1994) S. 941 f.

104) Vgl. bspw. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 65 f.

105) Die folgenden Erläuterungen dienen nur zum Grundverständnis, die formale Beschreibung erfolgt in Kapitel 2.2.3.3.

106) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 21 ff.

Anzahl der DMUs) die optimalen Koeffizienten („optimale Gewichtungen“ - „optimal weights“) $v_{i,k}$, $u_{j,k}$ unter folgenden Bedingungen bestimmt:

1. Der Wert θ der betrachteten DMU₀¹⁰⁷⁾ soll möglichst maximal, aber nicht größer als 1 sein (siehe auch Gleichung (4)):

$$\max \theta = \frac{u_{1,0} * y_{1,0} + u_{2,0} * y_{2,0} + \dots + u_{n,0} * y_{n,0}}{v_{1,0} * x_{1,0} + v_{2,0} * x_{2,0} + \dots + v_{m,0} * x_{m,0}} \quad (3)$$

2. Keine (andere)¹⁰⁸⁾ DMU darf mit den wertmäßig gleichen Koeffizienten der DMU₀ einen θ -Wert größer 1 haben:

$$\frac{u_{1,0} * y_{1,k} + u_{2,0} * y_{2,k} + \dots + u_{n,0} * y_{n,k}}{v_{1,0} * x_{1,k} + v_{2,0} * x_{2,k} + \dots + v_{m,0} * x_{m,k}} \leq 1 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (4)$$

3. Die einzelnen Koeffizienten $v_{i,0}$ und $u_{j,0}$ müssen Werte größer oder gleich Null annehmen¹⁰⁹⁾:

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (5)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (6)$$

Zudem muss noch die Bedingung gelten, dass alle Input- und Outputwerte größer (oder gleich)¹¹⁰⁾ Null sind.

Die gefundenen Koeffizienten präsentieren ein relatives Wertesystem für jede DMU¹¹¹⁾ und sind vergleichbar mit Schattenpreisen für die jeweiligen Faktorenmengen¹¹²⁾. Aus den einzelnen Produkten¹¹³⁾ kann abgelesen werden, welche Bedeutung die jeweiligen Input-/Outputfaktoren zur Erreichung der maximalen Effizienz für die DMU haben¹¹⁴⁾. Aber auch im Bezug zu anderen DMUs geben die Koeffizienten jeweils Auskunft darüber, wie wichtig der entsprechende Faktor für die DMU zur Effizienzeinstufung im Verhältnis zu anderen DMUs ist.

2.2.3.1 Pareto-Koopmans und radiale Effizienz

Aber nicht jede DMU, die als Ergebnis nach dem vorgestellten Modell einen Effizienzwert von 1 oder 100 % hat, ist auch im Sinne von CHARNES/COOPER/RHODES effizient (CCR-effizient („CCR-efficient“) oder unter der Bedingung einer konvexen Hülle „Pareto-Koopmans-effizient“¹¹⁵⁾). Aus Abbildung 4 geht bspw. hervor, dass der Punkt H auf dem Rand der Tech-

107) Der Index 0 soll angeben, dass es sich hierbei um die betrachtete DMU handelt. Es ist aber immer noch eine der DMUs aus dem Indexbereich 1 bis p - diese Notationsregel gilt bis auf Weiteres.

108) Dieser Klammerzusatz soll deutlich machen, dass die gewählten Koeffizienten mit keiner, weder der zu untersuchenden noch der anderen DMU einen Effizienzwert größer 1 haben dürfen.

109) Auf diesen Punkt wird in den folgenden Abschnitten noch eingegangen.

110) Diese Bedingung galt noch 1978 (vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1978) S. 430). Später wurde sie zu größer/gleich Null aufgeweicht, wenn mindestens ein Input- und ein Outputwert der betrachteten DMU größer Null ist (vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 41).

111) Vgl. ALLEN/ATHANASSOPOULOS/DYSON ET AL. (1997) S. 14.

112) Vgl. bspw. CHARNES/COOPER/THRALL (1991) S. 191.

113) Von den jeweiligen Koeffizienten und Faktoren.

114) Vgl. BOUSSOFIANE/DYSON/THANASSOULIS (1991) S. 6.

115) Im Folgenden wird CCR-effizient und Pareto-Koopmans-effizient synonym benutzt. Dies wird durch die implizite Annahme begründet, dass der Pareto-Koopmans-Effizienzbegriff sich auf die konvexe Hülle und somit auch auf die Kombination von DMUs bezieht.

nologie liegt und somit eine Effizienz von 100% berechnet wird. Dies ist aber nicht im Sinne des Pareto-Koopmans-Effizienzbegriffs, weil es durchaus für die durch H repräsentierte DMU möglich ist, durch weniger Input x_1 und bei gleich bleibendem Input x_2 dieselbe Menge an Output zu erzeugen. Dies beweist die Existenz der DMU des Punktes E. Somit ist die reine technische Effizienz nicht gleichzusetzen mit der Pareto-Koopmans-Effizienz¹¹⁶⁾.

Der Abstand zum Rand der Technologie wird daher als *radiale Effizienz*¹¹⁷⁾ bezeichnet. Eine radial effiziente DMU zeichnet sich dadurch aus, dass es nicht möglich ist, sich zu verbessern, ohne den Input- oder Output-Mix, also die Verhältnisse der Inputs oder Outputs untereinander, zu ändern¹¹⁸⁾. Die DMU H ist somit radial effizient, aber nicht CCR-effizient¹¹⁹⁾.

In dem CCR-Modell wurde dies zuerst berücksichtigt, indem entgegen den Gleichungen (5) und (6) gefordert wurde, dass alle optimalen Koeffizienten $v_{i,0}^*$, $u_{j,0}^*$ Werte > 0 annehmen¹²⁰⁾, damit eine DMU mit einem θ -Wert von 1 oder 100 % als (CCR-)effizient gilt¹²¹⁾. Diese Forderung wurde später wieder aufgehoben¹²²⁾.

Man findet in der Literatur auch die Unterscheidung zwischen „reiner technischer Effizienz/-Ineffizienz“¹²³⁾, was der radialen Effizienz entspricht, und der „technischen Effizienz“, welche die Kombination der radialen Effizienz und der „mix efficiency“ („Mischungseffizienz“) umfasst und somit wieder die Pareto-Koopmans-Effizienz bedeutet. Die Mischungseffizienz ergibt sich aus der möglichen Verbesserung einer DMU bei Änderung des Input-/Outputmixes wie bspw. der DMU H¹²⁴⁾.

In diesem Zusammenhang steht auch die für ein Effizienzmaß gewünschte¹²⁵⁾ Eigenschaft der *Monotonie*. Monotonie liegt vor, wenn gilt: Ist eine DMU in allen Input- und Outputfaktoren einer anderen DMU überlegen, so hat sie auch einen höheren Effizienzwert¹²⁶⁾. Strikte Monotonie liegt dagegen vor, wenn bereits die Überlegenheit in einem Faktor zu einem höheren Effizienzwert führt¹²⁷⁾. Reine radiale Effizienzwerte können somit nicht strikt monoton

116) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 45.

117) Radial bezieht sich darauf, dass grafisch betrachtet die Gerade, die durch die DMU und den Ursprung verläuft, zur Effizienzbetrachtung herangezogen wird. Siehe Abbildung 4 und die Erläuterungen im Text dazu.

118) Vgl. FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985) S. 49 und S. 80, COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 45.

119) Anzumerken ist hier, dass die DMU H durch eine noch so kleine Verringerung des Inputs x_2 Pareto-Koopmans-effizient wird. Dies ist insbesondere deshalb problematisch, da die Daten nur mit endlicher Genauigkeit erfasst werden können und somit die Ergebnisse nicht von minimalsten Ungenauigkeiten abhängen sollten. Dies ist bei diesem Effizienzbegriff jedoch nicht der Fall. Vgl. SCHEEL (2000) S. 68 f.

120) Das hochgestellte Sternchen steht für die „Optimalität“, in diesem Fall der optimalen Lösungen für $v_{i,0}$ und $u_{j,0}$.

121) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1979) S. 339, COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 24. Mit dieser Bedingung gilt jedoch noch das strikte „größer“ der Fußnote 110).

122) Dies ist in dem zweischrittigen Lösen des CCR-Modells begründet, welches in Kapitel 2.2.3.3 erklärt wird.

123) „purely technical inefficiency“

124) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 11 f.

125) Vgl. bspw. STEINMANN/ZWEIFEL (2001) S. 139, Cooper/Park/Pastor (1999) S. 16 f.

126) Vgl. SCHEEL (2000) S. 85f. *Schwache Monotonie* liegt vor, wenn die Verbesserung in mindestens einem Kriterium nicht zur Verschlechterung führt. Da alle Modelle die schwache Monotonie erfüllen, wird hierauf nicht weiter eingegangen.

127) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 17.

sein (Abbildung 4)¹²⁸⁾ und es kann somit auch keine gültige (In-)Effizienzrango­folge der DMUs erstellt werden¹²⁹⁾. Daher ist das CCR-Modell zwar monoton, aber nicht strikt monoton¹³⁰⁾. Andererseits hat die Unterscheidung zwischen der technischen und Pareto-Koopmans-Effizienz in der praktischen Anwendung kaum Bedeutung, da solche zwar technisch, aber nicht Pareto-Koopmans-effizienten DMUs nur sehr selten beobachtet werden¹³¹⁾. Daher wird diese Unterscheidung nicht als formale Voraussetzung behandelt.

2.2.3.2 Skalenerträge

Das CCR-Modell basiert auf der Annahme konstanter Skalenerträge. Dabei geht es um die Frage, wie sich der Output eines Transformationsprozesses verändert, wenn der Input vervielfacht, d.h. um einen Faktor λ „gestreckt“ wird. Hierbei soll sich das Verhältnis der einzelnen Input-/Outputfaktoren untereinander nicht ändern.

Generell sind drei verschiedene idealisierende Fälle denkbar. Die folgenden Definitionen müssen jeweils für **jede** beliebige Input-/Outputkombination (X, Y) aus einer Technologie­menge T gelten ($(X, Y) \in T$)¹³²⁾:

1. Konstante Skalenerträge oder „constant returns to scale“ (CRS) liegen vor, wenn für alle $\lambda > 0$ gilt: $(\lambda X, \lambda Y) \in T$
2. Überproportional steigende oder „increasing returns to scale“ (IRS) liegen vor, wenn ausschließlich für alle $\lambda > 1$ gilt: $(\lambda X, \lambda Y) \in T$
3. Unterproportional steigende oder „decreasing returns to scale“ (DRS) liegen vor, wenn ausschließlich für alle λ , $0 < \lambda < 1$ gilt: $(\lambda X, \lambda Y) \in T$

Skalenertragsannahmen können auch nur abschnittsweise zutreffen¹³³⁾.

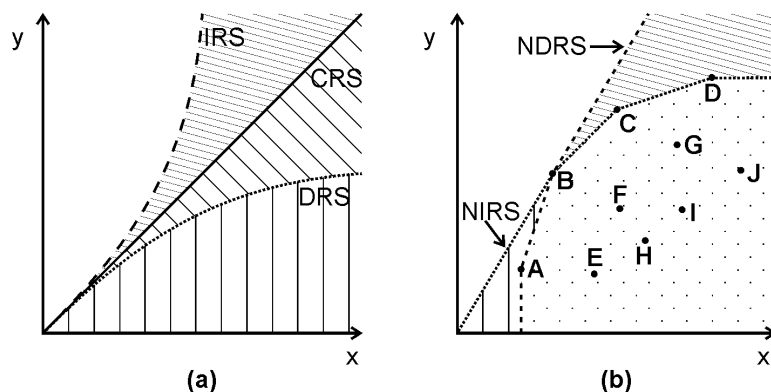


Abbildung 5: Skalenerträge für den 1-Input/1-Output-Fall

In Anlehnung an RAMANATHAN (2003) S. 67ff., KERSTENS/EECKAULT (1999) S. 209.

In Abbildung 5 (a) sind die drei idealtypischen Fälle am Beispiel von 1-Input/1-Output-Transformationsprozessen mit ihren Technologien (schraffierte Bereiche plus die jeweiligen Rän-

128) Siehe DMU H aus Abbildung 4.

129) Vgl. STEINMANN/ZWEIFEL (2001) S. 139.

130) Vgl. SCHEEL (2000) S. 95.

131) Vgl. LOVELL (1993) S. 13.

132) Vgl. DYCKHOFF (1994) S. 82 f., FEHL/OBERENDER (2002) S. 178 ff.

133) Dieser Fall wird bei der VRS-Skalenertragsannahme aufgenommen - siehe S. 16.

der) dargestellt. In diesem Beispiel enthält die Technologie der IRS die Technologie der CRS, die wiederum die Technologie der DRS enthält. Generell gilt dies jedoch nicht. In der DEA-Literatur¹³⁴⁾ wurden die Unterscheidungen der verschiedenen Skalenertragsarten erweitert, indem von nichtabnehmenden („non decreasing returns to scale“, NDRS) oder nichtzunehmenden Skalenerträgen („non increasing returns to scale“, NIRS) gesprochen wird, die jeweils den Fall der IRS bzw. DRS um den Fall der CRS erweitern (siehe dazu Abbildung 5 (b)). Die Technologie auf Basis der NIRS besteht aus der gepunkteten Linie als Begrenzung und dem senkrecht schraffierten als auch dem gepunkteten Bereich. Definiert wird diese durch den Ursprung und die DMUs B, C und D. Die Technologie auf Basis der NDRS besteht aus der gestrichelten Linie und dem schräg schraffierten wie auch dem gepunkteten Bereich. Definiert wird diese durch die DMUs A und B sowie der Teil der Gerade oberhalb des Punktes B, der durch den Ursprung und B verläuft. Für die DEA gibt es insbesondere zwei Annahmen über Technologien, die berücksichtigt werden. Zum einen die bereits angesprochenen konstanten Skalenerträge, die in diesem Beispiel der Abbildung 5 (b) durch die Gerade vom Ursprung durch den Punkt B gebildet wird. Unter diesen Voraussetzungen umfasst die Technologie den kompletten senkrechten und schräg schraffierten wie auch den gepunkteten Bereich. Und zum anderen die variablen Skalenerträge (variable returns to scale, VRS), die aus der Kombination der NDRS und NIRS gebildet wird. Somit kann eine VRS-Technologie *lokale* Abschnitte mit IRS, CRS und DRS enthalten¹³⁵⁾. In Abbildung 5 (b) ist dies die Umrandung, die durch die DMUs A bis D definiert wird sowie der darunter liegende gepunktete Bereich. Allerdings wird später gezeigt, dass es bei der DEA auch möglich ist, die NDRS, NIRS und Abstufungen dieser Skalenertragsannahmen zu verwenden.

Da bei gleichen Ausgangsdaten gebildete CRS-Technologien immer die VRS-Technologien enthalten¹³⁶⁾, ist eine unter der Annahme CRS effiziente DMU auch immer unter der Annahme der VRS effizient¹³⁷⁾.

2.2.3.3 Lösung des CCR-Modells

CHARNES/COOPER/RHODES lösen das „fraktionale Programmierungs-Problem“ des CCR-Modells mit Hilfe der linearen Programmierung¹³⁸⁾. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das inputorientierte CCR-Modell.

134) Vgl. bspw. BANKER (1984) S. 35 ff., PETERSEN (1990) S. 305 ff., RAMANATHAN (2003) S. 67 ff.

135) Hierbei liegt die Betonung auf „lokal“ (vgl. BANKER (1984) S. 40), da streng nach Definition der Punkt A bei Annahme von VRS eben nicht mehr unter IRS operiert, da kein *beliebiges* $\lambda > 1$ gewählt werden kann, so das $(\lambda x_A, \lambda y_A) \in T$ noch gilt - siehe dazu Abbildung 5 (b), vgl. PETERSEN (1990) S. 307. Allerdings wird der Hinweis auf das *lokale* Vorliegen auch weggelassen. Vgl. bspw. BANKER/CHARNES/COOPER (1984) S. 1086 f.

136) Vgl. KERSTENS/EECKAUT (1999) S. 211.

137) Vgl. Wei/Yan (2004) S. 648.

138) Im Original sprechen die Autoren von einem „fractional programming problem“, vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 23. Die folgenden Ausführungen sind an COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 21 ff. angelehnt. Für nähere Erläuterungen und für die Umformungsschritte siehe Anhang 2. Hierbei ist anzumerken, dass diese Arbeit die verschiedenen Modelle nach dem heute bekannten Stand der Forschung wiedergibt, da teilweise Modifikationen erfolgten.

Die Gleichungen (3) bis (6) werden umgeformt zum linearen Programmierungsproblem (LP_0) mit den Koeffizienten-Vektoren $V_0 (= v_{1,0}, \dots, v_{m,0})$ und $U_0 (= u_{1,0}, \dots, u_{n,0})$. Auf die Variable θ wird hier verzichtet, da sie im (noch folgenden) Dual¹³⁹⁾ wieder aufgenommen wird. LP_0 wird auch als „Multiplier Form“¹⁴⁰⁾ bezeichnet, da die Koeffizienten („multiplier“) U und V berechnet werden¹⁴¹⁾:

$$\max U_0 Y_0 \quad (7)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$V_0 X_0 = 1 \quad (8)$$

$$-V_0 X_k + U_0 Y_k \leq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (9)$$

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (10)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (11)$$

Zudem wird die Anforderung der strikt positiven In- und Outputs dahingehend aufgeweicht, dass für jede DMU zumindest ein Input- und ein Outputfaktor strikt positiv sein muss, aber nicht mehr alle Input- und Outputfaktoren. Diese dürfen auch Null-Werte annehmen.

In der Literatur¹⁴²⁾ finden sich immer noch CCR-Modelle mit der sog. „non-Archimedean“ Variable ε , einer unendlich kleinen Zahl größer Null. Sie dient dazu, ein echtes lineares Programmierungsproblem aus dem CCR-Ansatz zu erstellen, da die im Abschnitt 2.2.3.1 vorgestellte Modifikation¹⁴³⁾ der Gleichungen (5) und (6) nicht dazu führt, da eine Ungleichung der Form ' \geq ' oder ' \leq ' erforderlich ist. ε wurde eingeführt, um anstatt > 0 den Einheitsvektor E mit ε zu multiplizieren und so eine „positive Pseudo-Null“ zu erlangen, die die Bedingung zu $\geq \varepsilon$ aufweicht¹⁴⁴⁾. In anderen Formen findet sich ε als Multiplikator von den sog. „Slackvariablen“ (zu deutsch „Schlupfvariablen“), die zur Ermittlung dienen, ob nicht nur radiale Effizienz vorliegt. Sie werden weiter unten näher erläutert. In der praktischen Anwendung können jedoch durch die unterschiedliche Festlegungen von ε -Werten (bspw. 10^{-6} oder 10^{-12}) unterschiedliche DEA-Ergebnisse beobachtet werden, so dass ein ε -freies CCR-Modell zu bevorzugen ist, wie es hier vorgestellt wird¹⁴⁵⁾.

139) Ein Dual zu einem (standardisierten) linearen Programmierungsproblem, welches dann als Primal bezeichnet wird, ist eine Umformung in ein ebenfalls lineares Programmierungsproblem. Primal und Dual verbinden bestimmte Eigenschaften, die im Anhang 2 erläutert werden, ebenso wie die Umformung. Da es sich dabei um eine symmetrische Umformung handelt, ist es eine Definitionsfrage, welche der beiden linearen Programmierungsprobleme als Primal oder als Dual bezeichnet werden. Vgl. WEBER (1973) S. 7 ff. Für nähere Erläuterungen - insbesondere zum Primal/Dual - siehe Anhang 2. Im Folgenden werden die Bezeichnungen für die Primal/Dual-Form aus COOPER/SEIFORD/TONE (2000) übernommen, aber der umgekehrte Fall ist ebenfalls denkbar und in der Literatur zu finden, vgl. bspw. SCHEFCZYK (1994) S. 164 ff.

140) Da diese Bezeichnungen auch im Folgenden so verwendet werden, sind die Begriffe - entgegen der englischen Rechtschreibung - als „Eigennamen“ groß geschrieben. Entsprechendes gilt für die noch vorzustellende „Envelope Form“.

141) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 26.

142) Vgl. bspw. SCHEFCZYK (1996) S. 171, CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 37.

143) Siehe Kapitel 2.2.3.1.

144) Vgl. CHARNES/COOPER (1984) S. 333.

145) Vgl. TONE (1993) S. 167 ff., ALI/SEIFORD (1993) S. 138.

Das (inputorientierte) CCR-Modell wird deshalb für jede DMU (DMU_0) in zwei Schritten gelöst¹⁴⁶). Die folgende Konzentrierung auf das duale Problem von LP_0 (DLP_0) ist dadurch begründet, dass die optimalen V_0^* und U_0^* , die sich aus LP_0 ergeben, nicht direkt von Interesse sind, da das Verbesserungspotential und die Referenz-DMUs (Erklärung folgt) im Vordergrund stehen und V_0^* bzw. U_0^* nur zur ergänzenden Analyse benutzt werden. Zudem lässt sich DLP_0 leichter lösen, weil weniger Nebenbedingungen (Anzahl der In- und Outputfaktoren) im Gegensatz zum LP_0 auftreten (dort ergibt sich die Anzahl der Nebenbedingungen aus der Anzahl der DMUs, die üblicherweise höher sind)¹⁴⁷).

Im ersten Schritt wird das folgende DLP_0 gelöst:

$$\min \theta_0 \quad (12)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\theta_0 * x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k \geq y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (14)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (15)$$

Eine mögliche Lösung für dieses Problem ist $\theta_0 = 1$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = 0$ ($k \neq 0$). Daher ist das optimale θ_0 ($=\theta_0^*$) nicht größer als 1. Auf Grund der Annahme, dass mindestens ein Input und ein Output positive Werte annehmen, muss mindestens ein λ_k einen Wert größer Null annehmen, da sonst die Gleichung (14) nicht erfüllt wird. Wegen der Gleichung (13) kann dann θ_0^* nicht Null werden. Somit gilt: $0 < \theta_0 \leq 1$.

Aus den λ -Werten von DLP_0 kann eine virtuelle Vergleichseinheit DMU_{virtuell} zur betrachteten DMU_0 gebildet werden (wobei es sich bei $\lambda_k = 1$ nicht um eine virtuelle, sondern um die real beobachtete DMU_k handelt (somit $DMU_k = DMU_{\text{virtuell}}$)). Jeder Input-/Outputfaktor ($x_{i,\text{virtuell}}$ bzw. $y_{j,\text{virtuell}}$) von DMU_{virtuell} lässt sich durch folgende Gleichungen berechnen:

$$x_{i,\text{virtuell}} = \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (16)$$

$$y_{j,\text{virtuell}} = \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (17)$$

Daraus wird in Verbindung mit den Gleichungen (13) und (14) ersichtlich, dass $Y_{\text{virtuell}} \geq Y_0$ und $X_{\text{virtuell}} \leq \theta_0 * X_0$ gilt. Dementsprechend kann DLP_0 so interpretiert werden, dass, falls ein $\theta_0^* < 1$ gefunden wird, es eine - gegebenenfalls virtuelle - Vergleichseinheit DMU_{virtuell} gibt, die mindestens den gleichen Output bei um den Faktor θ_0^* proportional reduziertem Input erzeugt und somit effizienter als die DMU_0 ist¹⁴⁸). Da θ_0^* minimiert wird, gibt dieser Wert auch gleichzeitig den Multiplikator an, um den der Input von DMU_0 proportional reduziert werden

146) Zur genaueren Herleitung siehe Anhang 2.

147) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 52 f.

148) Vgl. SCHEFCZYK (1996) S. 170 f.

müsste, um auf den Rand der Technologie zu gelangen. θ liefert somit einen radialen Effizienzwert im Bezug auf die Inputs.

Die λ_k der Lösung des DLP_0 können als eine Gewichtung für jede Input-/Outputkombination einer DMU_k interpretiert werden, um so $DMU_{virtuell}$ zu berechnen. DLP_0 wird auch als „Envelopment Form“ bezeichnet, da direkt die „einhüllenden“ Referenz-DMU(s) aus den λ -Werten > 0 abgelesen werden können, aus denen die virtuelle Vergleichs-DMU berechnet wird¹⁴⁹). Somit sind die Referenz-DMUs die DMUs, aus denen die $DMU_{virtuell}$ (=die Vergleichs-DMU) gebildet wird. Die Referenz-DMUs werden auch als „reference set“ der betrachteten DMU_0 bezeichnet¹⁵⁰). Im Folgenden wird mit Referenz-DMU nur eine real beobachtete DMU bezeichnet. Die zum Vergleich der Effizienz gegebenenfalls virtuell gebildete DMU wird als Vergleichs-DMU bezeichnet.

Um nun die CCR-Effizienz zu bestimmen, werden die Slackvariablen eingeführt, die $DMU_{virtuell}$ mit der DMU_0 auf Basis der einzelnen In- und Outputs vergleichen:

Die Slackvariablen für den Input sind $s_{i,0}^-$ ($i = 1, \dots, m$) oder als Vektor S_0^- , die Slackvariablen für den Output sind $s_{j,0}^+$ ($j = 1, \dots, n$) oder als Vektor S_0^+ . Dementsprechend gilt:

$$S_0^- = \theta_0^* X_0 - X_{virtuell} \text{ und } S_0^+ = Y_{virtuell} - Y_0.$$

In dem zweiten Schritt geht es nun darum, bei gleichbleibendem θ_0^* die Werte der Slackvariablen zu maximieren und zu überprüfen, ob diese alle Null ergeben. Nur dann ist gewährleistet, dass die DMU_0 nicht noch zusätzlich zur reinen proportionalen technischen Effizienz noch Effizienzpotentiale durch Änderung des Input- oder Outputmixes aufweist. Daher reichte im ersten Schritt bei den Gleichungen (10) und (11) die Bedingung „ ≥ 0 “ aus¹⁵¹).

Schritt 2: Löse folgende Gleichungen mit den Variablen λ_k , S_0^- und S_0^+ und dem Einheitsvektor E .

$$\max \omega = E * S_0^- + E * S_0^+ \quad (E * S_0^- = \sum_{i=1}^m s_{i,0}^- \text{ und } E * S_0^+ = \sum_{j=1}^n s_{j,0}^+) \quad (18)$$

unter den Nebenbedingungen

$$s_{i,0}^- = \theta_0^* x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (19)$$

$$s_{j,0}^+ = \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \\ s_{i,0}^- &\geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ &\geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

Wenn nun die optimale Lösung für den Schritt 2 bei $\theta_0^*=1$ und $S_0^- = 0$, $S_0^+ = 0$ vorliegt, dann ist die DMU_0 CCR- oder Pareto-Koopmans-effizient. Falls nicht, gibt es mindestens eine Referenz-DMU, aus der die virtuelle Vergleichs-DMU gebildet werden kann, die im Vergleich

149) Vgl. SCHEFCZYK (1996) S. 170.

150) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 47. Im Folgenden wird der Plural Referenz-DMUs benutzt, es kann sich dabei immer auch nur um eine DMU handeln.

151) Siehe Fußnote 122).

zur DMU₀ CCR-effizient ist. Diese Referenz-DMUs sind alle DMUs, die bei der optimalen Lösung des Schrittes 2 einen λ -Wert größer Null haben¹⁵²⁾. Diese sind somit auch CCR-effizient. Somit kann für jede ineffiziente DMU ermittelt werden, durch welche anderen DMUs die Ineffizienz der betrachteten DMU begründet ist.

Das Verbesserungspotential Δx (für die Inputverbesserung) und Δy (für die Outputverbesserung) der DMU₀ kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Delta x &= (1 - \theta_0^*) X_0 + S_0^* \\ \Delta y &= S_0^{**}\end{aligned}\quad (22)$$

Allerdings wird dadurch auch deutlich, dass der aggregierte Effizienzwert θ des CCR-Modells sich nur auf die radiale Effizienz bezieht und somit nicht uneingeschränkt zum Effizienzvergleich geeignet ist. Praktisch spielt dies jedoch kaum eine Rolle¹⁵³⁾.

Für das outputorientierte CCR-Modell können die jeweiligen Werte für den Outputerhöhungsmultiplikator und die Slacks¹⁵⁴⁾ durch die Division von θ_0^* ermittelt werden. Zur Vollständigkeit ist es in der Envelopment Form aufgeführt. Diese Form kann durch Ersetzungen

$$\lambda = \mu / \eta \quad \theta = 1 / \eta \quad (23)$$

direkt aus dem (inputorientierten) DLP₀ (Gleichungen (12) bis (15)) abgeleitet werden:

$$\max \eta_0 \quad (24)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \mu_k \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \mu_k \geq \eta * y_{j,0} \rightarrow \eta * y_{j,0} - \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \mu_k \leq 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n \quad (26)$$

$$\mu_k \geq 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, p \quad (27)$$

Diese Ausführungen sollten am Beispiel des CCR-Modell verdeutlichen, wie die Berechnungen zur Effizienzbestimmung bei der DEA ablaufen können.

2.2.4 Weitere DEA-Modelle

Anzumerken ist, dass es eine Vielzahl von Modellen und Modellvarianten zur DEA gibt, die hier nicht im Detail wiedergegeben werden können, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde¹⁵⁵⁾. Nach CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL.¹⁵⁶⁾ werden das BCC-, CCR-, das additive Basis- und die beiden multiplikativen Modelle als Basis-Modelle der DEA bezeichnet¹⁵⁷⁾. Hier werden die Basis-Modelle und die Modellarten vorgestellt, die in der Literatur besondere Aufmerksamkeit erlangt haben und/oder die sich durch ihre zu Grunde liegenden Annahmen

152) Man beachte, dass es nicht unbedingt die gleichen Referenz-DMUs aus Schritt 1 sein müssen.

153) Siehe dazu den Abschnitt bei der Fußnote 131) auf Seite 15.

154) Slacks sind die Werte für die Slackvariablen.

155) Vgl. bspw. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 91., KLEINE (2002) S. 211. Für eine umfassende DEA-Modell-Übersicht siehe EMROUZNEJAD (2004).

156) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 23 ff.

157) Diese Modelle werden noch in diesem Kapitel vorgestellt.

unterscheiden. Die mathematischen Formulierungen für alle hier behandelte Modelle sind im Anhang 3 zusammengefasst. Auf Modifikationen, die auf diesen Modellen aufbauen und Probleme der DEA beheben oder zu beheben versuchen, wird an gegebener Stelle in Kapitel 3 hingewiesen.

2.2.4.1 BCC-Modell

Das BCC-Modell¹⁵⁸⁾ (nach BANKER/CHARNES/COOPER benannt) beinhaltet Modifikationen des CCR-Modells, um auch unter der Bedingung von VRS Effizienzberechnungen vornehmen zu können. Bei diesem Modell ist jedoch die Orientierung von größerer Bedeutung, weil eine direkte Umrechnung in die Ergebnisse des jeweils anders orientierten Modells wie beim CCR-Modell nicht möglich ist.

Der Grundgedanke ist, dass die CCR-Effizienz aus der technischen und einer größenabhängigen Effizienz¹⁵⁹⁾ gebildet wird. Um diese größenabhängige Effizienz herauszurechnen, wird die Oberfläche der konvexen Hülle durch die anteilige Kombination von effizienten DMUs gebildet¹⁶⁰⁾, d.h. dass die jeweiligen Anteile der DMUs aufaddiert 1 ergeben. Daher ist gewährleistet, dass es keine virtuelle Vergleichs-DMU gibt, die sich durch einen beliebigen skalaren Multiplikator berechnet und somit nur abschnittsweise Linearität zwischen mehreren (mindestens 2) DMUs vorliegt und so größenabhängige Produktivitätsunterschiede neutralisiert werden¹⁶¹⁾. Das BCC-Modell ist nur monoton in Bezug auf die jeweilige Orientierung¹⁶²⁾.

Die Modifikation des (inputorientierten) DLP_0 des CCR-Modells ergibt sich nur aus der Ergänzung der sog. Konvexitätsbedingung („convexity constraint“ - CC)¹⁶³⁾¹⁶⁴⁾:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (28)$$

Gleichung (28) führt die in der modifizierten Version des (primalen) LP_0 zu einer skalaren Korrekturvariable z_0 , für die keinerlei Vorzeichenbeschränkung gilt. Diese Gleichung erzwingt die Konvexität der effizienten Ränder der Technologie (der „Hülle“), die durch die DMUs gebildet werden.

Aus der Gleichung (7) wird dann $\max U_0 Y_0 - E * z_0$ (29)

und aus der Nebenbedingung (9)

$$-V_0 X_k + U_0 Y_k - E * z_0 \leq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (30)$$

Sonst ist das BCC-Modell in entsprechender Weise zu lösen, wie es für das CCR-Modell vorgestellt wurde¹⁶⁵⁾. Anhand der Variable z_0^* (größer, gleich oder kleiner Null) kann für jede DMU_0 abgelesen werden, unter welcher Skalenertragsannahme die DMU_0 in Bezug auf die

158) Vgl. BANKER/CHARNES/COOPER (1984) S. 1078 ff.

159) BANKER/CHARNES/COOPER (1984) S. 1088. sprechen von „scale efficiency“.

160) Genau genommen: Unter Annahme von VRS-effizienten DMUs.

161) Vgl. SCHEFCZYK/GERPOTT (1995) S. 341.

162) Vgl. SCHEEL (2000) S. 95.

163) Vgl. bspw. ALI/LERME/SEIFORD (1995) S. 464, CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 29.

164) Vgl. für die folgenden Ausführungen COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 88 ff.

165) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 89.

konvexe Hülle operiert¹⁶⁶). Zudem kann durch eine Änderung des Gleichheitszeichens in der Gleichung (28) der Fall der NIRS (\leq) oder der NDRS (\geq) modelliert werden¹⁶⁷) oder durch Ab-

änderung von (28) zu $L \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k \leq Q$ für $0 \leq L \leq 1$ und $Q \geq 1$ (31) ein „Generalized Returns-to-Scale“-Modell (GRS) abgeleitet werden, bei dem jeweils L und Q angeben, in welchen Bereichen sich die Skalenertragsannahmen bewegen¹⁶⁸).

2.2.4.2 Additive Modelle

Beim additiven Basis-Modell¹⁶⁹) (Add) wird das BBC-Modell dahingehend abgeändert, dass nur noch der zweite Schritt - siehe entsprechend beim CCR-Modell - durchgeführt und vorerst kein aggregierter Effizienzwert berechnet wird. Es werden nur die Slackvariablen maximiert¹⁷⁰). Dies bedeutet aber auch, dass bei diesem Effizienzmaß die maximale „Distanz“ zur Hülle berechnet wird (im 1-Input/1-Output-Fall grafisch betrachtet nach „oben-links“¹⁷¹), bei der nur die Faktormengen eine Rolle spielen¹⁷²) und zudem die Summe der Slacks bei unterschiedlichen Einheiten und ohne zusätzliche Informationen nicht aussagekräftig ist¹⁷³). Dafür ist das Add-Modell streng monoton¹⁷⁴). Zum mathematischen Modell siehe Anhang 2.

Somit werden beim additiven Modell die Inputs und Outputs gleichwertig behandelt, d.h. es ist orientierungslos. Zudem ist zu beachten, dass die Input- und Outputverhältnisse untereinander nicht erhalten bleiben müssen, wenn in Richtung der konvexen Hüllen die (In-)Effizienz berechnet wird¹⁷⁵). Die Abänderungen der CC bis hin zum GRS-Fall sind ebenso möglich, wie ein additives-CRS-Modell, wenn die Gleichung weggelassen wird¹⁷⁶).

Ein weiteres additives Modell ist das „Range Adjusted Measure“ (RAM)¹⁷⁷). Der streng monotone RAM-Wert gibt das durchschnittliche Verbesserungspotential in Bezug auf die maximal mögliche Verbesserung an¹⁷⁸). Dabei werden die einzelnen Slackvariablen durch die jeweiligen Spannweiten R (englisch „range“) geteilt, bevor sie aufaddiert werden. Die Spannweiten sind dadurch definiert, dass von jedem Input (Output) der kleinste von dem größten festgestellten Wert abgezogen wird¹⁷⁹). Zusätzlich wird die daraus resultierende Summe durch die

166) Vgl. BANKER/CHARNES/COOPER (1984) S. 1087. Allerdings ist dieser Wert nur für die effizienten DMUs eindeutig, da generell eine Abhängigkeit von der Orientierung des BCC-Modells besteht.

167) Vgl. RAMANATHAN (2003) S. 74 ff.

168) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 135 f.

169) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 91. Ursprünglich wurde das erste additive Modell in CHARNES/COOPER/GOLANY ET AL. (1985) (S. 97) vorgestellt. Weiter unten wird noch ein weiteres additives Modell vorgestellt.

170) Der θ -Wert des CCR-Modells wird somit immer gleich 1 angenommen und daher weggelassen.

171) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 28.

172) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 5. Siehe auch die Abbildung 8 (c).

173) Vgl. STEINMANN/ZWEIFEL (2001) S. 139.

174) Vgl. SCHEEL (2000) S. 107.

175) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 93 f.

176) Vgl. SCHEFCZYK/GERPOTT (1994) S. 942.

177) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 18 ff. Für das mathematische Modell siehe Anhang 3.

178) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 20, vgl. ALLEN (2002) S. 145.

179) Falls $R = 0$ sein sollte, so wird die entsprechende Slackvariable auf 0 gesetzt und die entsprechenden Nebenbedingungen weggelassen - vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 20.

Anzahl der Inputs und Outputs geteilt. Da so kleinere Werte für höhere Effizienz stehen, ist es üblich, das Ergebnis von 1 zu subtrahieren, damit 1 für Effizienz und kleinere Werte für Ineffizienz stehen. Das RAM besitzt keine eigene Definition einer konvexen Hülle, so dass es beispielsweise mit den Nebenbedingungen des BCC- oder CCR-Modells kombiniert werden kann¹⁸⁰). Dies führt jedoch zu dem Verlust bestimmter Eigenschaften, so dass hier die später vorgestellte Unterscheidung zwischen RAM-Modell und RAM-Maß dahingehend berücksichtigt wird¹⁸¹), dass mit RAM nur das Modell mit der Konvexitätsbedingung (entsprechend den Nebenbedingungen des Add-Modells) gemeint ist und behandelt wird. Somit ist auch nur der VRS-Fall möglich.

2.2.4.3 Multiplikative Modelle

Bei multiplikativen Modellen steht die Idee im Vordergrund, die einzelnen Inputs/Outputs nicht aufzuaddieren, sondern zu multiplizieren¹⁸²). Dabei werden die Koeffizienten wie beim CCR-Modell nicht mehr multipliziert, sondern zu Exponenten umfunktioniert, deren Werte größer 1 sein müssen. Um zu einem linearen Programmierungsproblem zu gelangen, wird dann der Logarithmus¹⁸³) angewendet. Nach Umformungen entsteht das erste multiplikative Modell („VarMult“). Das Gleichungssystem entspricht dem Add-Modell mit logarithmierten Daten und ist im Anhang 3 aufgeführt.

Dieses Modell hat eine abschnittsweise logarithmisch-lineare Hülle (im Gegensatz zu bisher abschnittswisen linearen Hüllen), während eine Weiterentwicklung (das sog. invariante multiplikative Modell („InvMult“))¹⁸⁴) eine abschnittsweise durch Cobb-Douglas Funktionen¹⁸⁵) definierte Hülle aufweist. Das InvMult-Modell unterscheidet sich durch die Konvexitätsbedingung vom VarMult-Modell¹⁸⁶). Da beide Modelle mit Hilfe des Logarithmus berechnet werden, müssen auch auf die Ausgangsdaten die Logarithmen angewendet werden. So wird die Hülle durch die konvexe Kombination von „logarithmierten“ DMUs erzeugt¹⁸⁷). Auf Grund der strengen Monotonie der Logarithmus-Funktion ist dies jedoch eindeutig und umkehrbar möglich. Somit ist auch entsprechend dem Add-Modell die strenge Monotonie gegeben. Als Skalenertragsannahme kommt für das VarMult-Modell logarithmiert nur CRS in Frage, da die Konvexitätsbedingung fehlt¹⁸⁸). Dies führt jedoch dazu, dass die nicht logarithmierten Daten

180) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 23 ff.

181) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (2001) S. 147.

182) Vgl. CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. (1982) S. 223 f., CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. (1983) S. 101 ff.

183) CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. schreiben zwar, dass der Logarithmus zu einer beliebigen Basis genommen werden kann (CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. (1982) S. 223), aber um nicht die Daten in einen negativen Zahlenraum zu überführen, können nur Basen größer 1 benutzt werden. In dieser Arbeit wird immer der Logarithmus Naturalis (ln) benutzt, wenn es um die praktische Anwendung einer Logarithmus-Funktion geht.

184) Vgl. CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. (1983) S. 101 f.

185) Die Cobb-Douglas-Funktion ist durch die folgende Form definiert (vgl. DYCKHOFF (2003) S. 143):

$$y = \alpha_0 * (x_1)^{\alpha_1} * \dots * (x_m)^{\alpha_m} \quad (\alpha_i > 0 \text{ für alle } i=0, \dots, m)$$

186) Vgl. SCHEFCZYK/GERPOTT (1994) S. 943.

187) Vgl. CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. (1983) S. 102.

188) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 31.

(Ausgangsdaten) sich an einem nicht-linearen Technologierand orientieren. Das InvMult dagegen ist logarithmisiert für VRS definiert. Deshalb ist gewährleistet, dass bei den Ausgangsdaten die Cobb-Douglas-Funktion nur abschnittsweise den effizienten Rand definiert. Auf Seite 35 an Abbildung 8 (a) und (b) wird dies verdeutlicht.

Die Ergebnisse der Modelle geben an, um welchen Multiplikator die Inputs und Outputs vergrößert bzw. verringert werden müssen, um auf den effizienten Rand zu gelangen. Dazu müssen die entsprechenden Slacks durch die Umkehrfunktion des Logarithmus (bei In somit die Exponentialfunktion) transformiert werden. Der transformierte Inputslack ist dann der Inputmultiplikator, der transformierte Outputslack der Outputmultiplikator¹⁸⁹⁾.

2.2.4.4 Free Disposal Hull (FDH)

In der Literatur gibt es unterschiedliche Auffassungen, ob das FDH-Modell zur DEA gezählt werden soll. Als Modell ohne konvexe Hülle¹⁹⁰⁾ gelangte es jedoch zu verstärkter Aufmerksamkeit und wird deshalb hier behandelt¹⁹¹⁾.

Der Grundgedanke basiert darauf, keine virtuellen Vergleichs-DMUs zu berechnen, sondern sich nur auf die beobachteten DMUs zu beziehen. Das bedeutet, dass eine DMU schon dann als effizient anzusehen ist, wenn sie in mindestens einem Inputfaktor geringere oder in einem Outputfaktor höhere Werte als alle anderen DMUs aufweist¹⁹²⁾ - dies entspricht dem Pareto-Koopmans-Effizienzbegriff. Auf die besondere „Treppenform“ des FDH-Modells wird in Kapitel 3.2.5 eingegangen. Die mathematische Formulierung findet sich in Anhang 3.

Die einzige Modifikation gegenüber dem BCC-Modell ist die zusätzliche Gleichung:

$$\lambda_k \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (32)$$

Da λ_k nur noch 0 oder 1 annehmen kann und durch den CC die Summe der λ_k 1 ergeben muss, besteht die Referenz-DMU jeweils immer nur aus einer beobachteten DMU. Daher liefert das FDH-Modell auch nur radiale (In-)Effizienzwerte ohne Berücksichtigung von Slacks, da diese nicht in der Zielfunktion enthalten sind und somit nicht vom Input-/Outputmix abgewichen werden kann¹⁹³⁾. Zu beachten ist, dass hier keine Skalenertragsannahme zu Grunde liegt, da sich die FDH-Technologie nur an den beobachteten DMUs unter der Annahme der freien Verschwendbarkeit (siehe Kapitel 3.2.2) orientiert. Zudem ist die Lösung des FDH-Modells auf Grund der Nebenbedingung (32) mit der üblichen linearen Programmierung nicht möglich, sondern basiert auf paarweisen Vektorenvergleichen, indem zu jeder DMU₀ die „am meisten“ dominierende DMU gesucht wird¹⁹⁴⁾. Das FDH-Modell ist nur entsprechend dem

189) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 45.

190) Auf den Begriff der konvexen Hülle wird in Kapitel 3.2.1 eingegangen.

191) Vgl. bspw. PARK/SIMAR/WEINER (2000) S. 855, KLEINE (2002) S. 131ff., THRALL (1999) S. 249, CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000A) S. 263ff., SCHEFCZYK (1994) S. 189, SCHEEL (2000) S. 54, COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 13.

192) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 106.

193) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 106.

194) Vgl. TULKENS (1993) S. 189 und S. 207, CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2001) S. 201; wobei bei diesem Verfahren keinerlei aufwendige Lösungsalgorithmen wie bei der linearen Programmierung nötig sind.

BCC-Modell monoton in der jeweiligen Orientierung.

2.2.5 Modellüberblick

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick der in dieser Arbeit behandelten Effizienzmaße oder Modelle.

<i>Modell</i>	<i>mögliche Orientierungen</i>	<i>mögliche Skalenertragsannahmen</i>	<i>Monotonie</i>
CCR	Input/Output	CRS	monoton
BCC	Input/Output	VRS (abänderbar auf NIRS, NDRS, GRS)	monoton in In- oder Outputs
Add	orientierungslos	VRS (abänderbar auf NIRS, NDRS und CRS, wird jedoch nicht betrachtet) ¹⁹⁵⁾	strikt monoton
RAM	orientierungslos	VRS (abänderbar auf NIRS, NDRS und CRS, wird jedoch nicht betrachtet) ¹⁹⁵⁾	strikt monoton
VarMult log-linear	orientierungslos	CRS bezogen auf Log(X), Log(Y)	strikt monoton
InvMult Cobb-Douglas	orientierungslos	VRS bezogen auf Log(X), Log(Y)	strikt monoton
FDH	Input/Output	keine (abänderbar auf NIRS und NDRS, wird jedoch nicht betrachtet) ¹⁹⁵⁾	monoton in In- oder Outputs

Tabelle 1: Überblick über die in dieser Arbeit behandelten DEA-Modelle

2.3 Vorgehensmodell

Der Begriff Vorgehensmodell stammt aus dem Software-Engineering. Ein Vorgehensmodell dient dazu, den Vorgehensprozess zur Entwicklung betrieblicher Anwendungssoftware durch Beschreibungen und Anleitungen zu strukturieren und abzubilden, um somit Transparenz und Planbarkeit zu erreichen¹⁹⁶⁾. Daher besteht der Kern eines Vorgehensmodells aus Regeln, die das Vorgehen definieren, sowie Methoden und unterstützenden Werkzeugen. Methoden sind planmäßig angewandte, begründete Vorgehensweisen zur Erreichung von festgelegten Zielen, Werkzeuge sind programmtechnische Mittel, die der automatisierten Unterstützung dienen¹⁹⁷⁾. Ein Vorgehensmodell ist dabei ein Referenzmodell für das konkrete (projektbezogene) Softwareentwicklungsmodell, welches letztlich bei der eigentlichen Anwendungsentwicklung verwendet wird¹⁹⁸⁾. Ein Referenzmodell unterscheidet sich vom konkreten Modell dadurch, dass es eine Klasse von Anwendungsfällen behandelt¹⁹⁹⁾.

Ein Vorgehensmodell ist jedoch nicht auf die Softwareentwicklung beschränkt. Somit wird in dieser Arbeit ein Vorgehensmodell erstellt, welches die Modellauswahl bei der Anwendung einer DEA-basierenden Effizienzanalyse zum Ziel hat. Da dies nicht im Kontext einer be-

195) Der GRS-Fall ist ebenso theoretisch denkbar. Die abgeänderten Modelle werden deshalb nicht betrachtet, da dadurch verschiedene Eigenschaften verloren gehen (siehe z.B. Kapitel 3.3.3) und zudem diese Modelle nach dem derzeitigen Wissensstand der Literatur nur angedacht oder als denkbar beschrieben werden.

196) Vgl. FISCHER/BISKUP/MÜLLER-LUSCHNAT (1998) S. 16.

197) Vgl. FISCHER/BISKUP/MÜLLER-LUSCHNAT (1998) S. 16 und S. 26.

198) Vgl. BREMER (1998) S. 34.

199) Vgl. SCHÜTTE (1998) S. 69 f.

stimmten DEA-basierenden Effizienzanalyse geschieht, ist die erforderliche Generalität eines Referenzmodelles gegeben.

2.4 Petri-Netze

Das Petri-Netz ist die für das Vorgehensmodell verwendete Beschreibungssprache und ein Systemmodell, mit dem Vorgänge, Organisationen und Geräte abgebildet werden können, bei denen insbesondere Nachrichtenflüsse relevant sind²⁰⁰. Das Petri-Netz ist besonders wegen der folgenden Eigenschaften für ein Vorgehensmodell geeignet: Es besteht die Möglichkeit zur Darstellung

- kausaler Ab- und Unabhängigkeiten,
- Nebenläufigkeit der Abläufe und
- der Modellierung verschiedener Abstraktionsebenen mit der gleichen Beschreibungssprache.

In dieser Arbeit wird als Petri-Netz-Variante das Stellen-Transitions-Netz (ST-Netz) benutzt²⁰¹ (siehe Abbildung 6: Die folgenden Angaben in Klammern beziehen sich darauf).

Ein ST-Netz besteht aus Stellen, Transitionen, Marken und gerichteten Kanten²⁰². Stellen repräsentieren Zustände, während Transitionen die Übergänge zwischen Zuständen darstellen. Die gerichteten Kanten verbinden die Stellen mit ihren entsprechenden Zuständen, wobei auf eine Stelle immer eine Transition und auf eine Transition immer eine Stelle folgen muss. Stellen können mit Marken belegt sein. Eine Marke auf einer Stelle zeigt an, dass die-

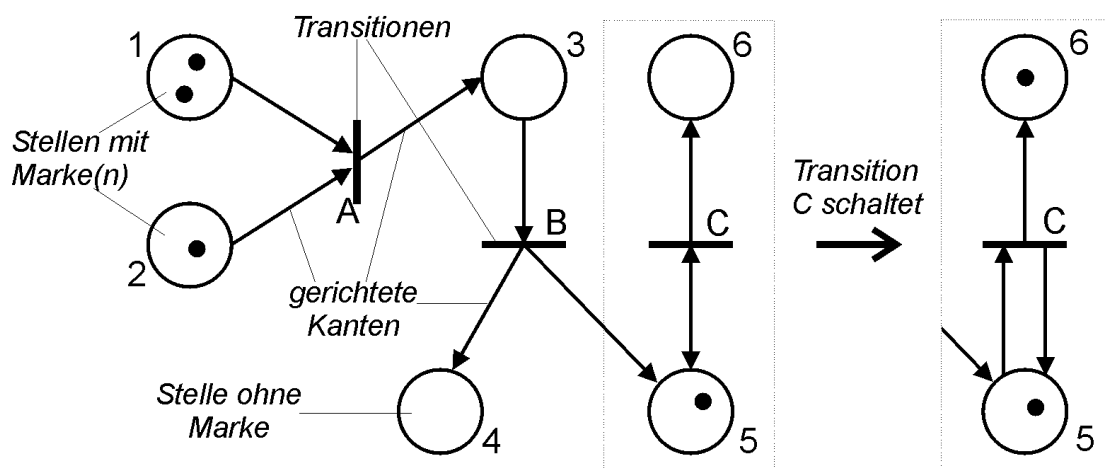


Abbildung 6: Beispiel für ein ST-Netz

Eigene Erstellung, in Anlehnung an Reising (1991)

ser Zustand eingenommen wurde (Stellen 1, 2 und 5). Sind alle vorgelagerten Stellen einer Transition mit Marken belegt (Stelle 1 und 2 mit Transition A), so kann diese schalten und die nachgelagerten Stellen mit Marken belegen (Zustand nach erster Schaltung von Transiti-

200) Vgl. REISING (1991) S.1.

201) Vgl. REISING (1991) S. 69 ff.

202) Auf Kanten mit Gewichten und Stellen mit Kapazitäten wird in dieser Arbeit nicht eingegangen, da sie nicht benötigt werden. Die Stellen können beliebig viele Marken aufnehmen.

on A: Stelle 1: 1 Marke, Stelle 2: 0 Marken, Stelle 3: 1 Marke, alle anderen Stelle unverändert). Bei der Transition C liegt ein Spezialfall vor. Die Kante von der Stelle 5 zur Transition ist in beide Richtungen gerichtet. Dies ist jedoch nur eine Vereinfachung der ausführlichen Notation zweier Pfeile, die jeweils zur Transition hin und zurück gerichtet sind. Der Zustand nach der (ersten) Schaltung ist rechts daneben ebenfalls dargestellt.

Die Schaltung von Transitionen wird manuell ausgelöst und kann - dies ist eine Erweiterung, die in der Grundform des ST-Netzes so nicht vorhanden ist - mit Bedingungen verknüpft werden, deren Erfüllung außerhalb des ST-Netzes überprüft werden muss. Auf besondere „Bedingungs-Stellen“ - wie z.B. bei REISIG (1991) S. 102ff. - wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

3 Voraussetzungen der DEA

Die nun folgenden Voraussetzungen der DEA orientieren sich an den notwendigen Gegebenheiten, die vorliegen müssen, um die entsprechenden Modelle „sinnvoll“ anwenden zu können. Diese Erweiterung auf die „sinnvolle“ Anwendung geschieht deshalb, da die rein formale Anwendung der DEA zu Ergebnissen führen kann, die sich in der Praxis als problematisch erwiesen haben²⁰³. „Sinnvoll“ ist dahingehend definiert, dass die Ergebnisse der DEA nicht im Widerspruch zu evtl. vorhandenem (Vor-)Wissen über den Untersuchungszweck stehen und zugleich das Bestreben vorliegt, eine große Anzahl von Anwendungsfällen abzudecken. Somit werden Lösungsansätze für bereits bekannte Probleme mit der DEA aufgezeigt. Auf die hierbei nicht auszuschließenden subjektiven Einflüsse wird an gegebener Stelle hingewiesen.

Es wird angenommen, dass bereits die folgenden Entscheidungen getroffen sind, die gegebenenfalls jedoch noch revidiert werden können²⁰⁴): Das Analyseziel ist festgelegt, d.h. der Zweck der Effizienzuntersuchung ist ebenso definiert wie auch die DMUs. Es muss somit klar sein, welche DMUs zu untersuchen sind und was eine DMU umfasst (mindestens räumlich, zeitlich, funktional). Darauf aufbauend sind die Beurteilungskriterien der DMUs festgelegt, d.h. die In- und Outputs sowie ihre Messung/Erhebung müssen klar definiert sein. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass insbesondere der letzte Punkt subjektiven Entscheidungen unterliegt²⁰⁵, was in Kapitel 3.4 verdeutlicht wird.

3.1 DMUs

Eine wesentliche Voraussetzung für die DEA ist, dass die unterschiedlichen DMUs mit gleichen Mitteln die gleichen Ziele verfolgen. Das bedeutet, dass alle DMUs durch die gleichen In- und Outputs charakterisiert werden und diese sich nur quantitativ unterscheiden, wobei

203) Dies wird in diesem Kapitel noch verdeutlicht.

204) In Anlehnung an SCHEEL (2000) S. 16 ff.

205) Vgl. SCHEEL (2000) S. 18.

zum Teil auch Null-Werte zugelassen sind²⁰⁶). Dies erfordert die vergleichende Aussage über die DMUs, da eine gemeinsame Technologie dafür die Basis ist²⁰⁷).

Daher wird ebenfalls vorausgesetzt, dass diese DMUs unter ähnlichen Umweltbedingungen operieren sowie ähnliche Mittel zur Verfügung haben²⁰⁸). Dies impliziert, dass die Faktoren alle genutzten und produzierten Ressourcen der DMUs abdecken, da sonst wesentliche, die Effizienz möglicherweise beeinflussende Faktoren fehlen können²⁰⁹). Falls hiervon abgewichen wird, müssen zusätzliche Umwelteinflussfaktoren eingeführt werden, die die Unterschiede berücksichtigen. Auf die Probleme mit zu vielen Faktoren im Vergleich zu der Anzahl der DMUs wird in Kapitel 3.4 eingegangen. Es ist jedoch offensichtlich, dass allein die zusätzliche Auswahl von Faktoren wiederum subjektiven Gesichtspunkten unterliegt²¹⁰).

Ebenfalls impliziert die gemeinsame Technologie, dass die vorliegenden Daten der DMUs für den gleichen Zeitraum und zur gleichen Zeit gelten. Andernfalls kann wegen des (nicht auszuschließenden) technischen Fortschritts nicht von einer gemeinsamen Technologie ausgegangen werden. Falls trotzdem DMUs im Zeitverlauf verglichen werden sollen, sind dabei die Ergebnisse nur unter Vorbehalt zu interpretieren.

Window Analysis

Dennoch gibt es einen Ansatz, der zeitlich aufeinanderfolgende Prozesse betrachtet: die sog. Window Analysis²¹¹). Hierbei wird jeder Prozess eines Zeitraumes als DMU angesehen und mit den Prozessen der anderen DMUs der gleichen und einer bestimmten Anzahl („Window“) der nachfolgenden Perioden verglichen. Dieses Verfahren kann zur Identifizierung von Effizienztrends benutzt werden²¹²), auch wenn noch weitere Erforschung nötig ist, bevor Handlungsempfehlungen gegeben werden können, die über „trial and error“²¹³) hinausgehen²¹⁴). Ein klarer Vorteil dieses Verfahrens liegt in der künstlichen Vergrößerung der zu vergleichenden DMU-Menge durch die mehrfache periodenabhängige Berücksichtigung der DMUs²¹⁵).

Da die DEA sehr anfällig gegenüber Datenstörungen ist, müssen die einzelnen DMUs so

206) Vgl. SCHEEL (2000) S. 12 f. Auf diesen Punkt wird in Kapitel 3.2.5 eingegangen.

207) Siehe auch Kapitel 2.2.2, Seite 8.

208) Vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 247. Hierbei sei angemerkt, dass die Formulierung „ähnliche...“ bereits die ersten subjektiven Einflüsse zulässt, da streng genommen „gleiche“ gemeint ist. Es dürfte jedoch in der Praxis kaum möglich sein, von definitiv gleichen Bedingungen ausgehen zu können. SMITH ist der Ansicht, dass es vorteilhafter ist, einen Faktor zu viel als einen zu wenig aufzunehmen. In einer Simulation stellte er fest, dass fehlende Faktoren einen größeren negativen Effekt auf die (In-)Effizienzwerte hatten, als wenn ein Faktor zu viel benutzt wurde. Vgl. SMITH (1997) S. 239 ff. und 249.

209) Vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 248.

210) Siehe dazu Kapitel 3.4.

211) Vgl. CHARNES/COOPER/GOLANY ET AL. (1985) S. 57.

212) Vgl. ASMILD/PARADI/AGGARWALL ET AL. (2004) S. 69.

213) Verfahren des „Versuchs und Irrtums“.

214) Vgl. ASMILD/PARADI/AGGARWALL ET AL. (2004) S. 81 und S. 85, CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 60. Insbesondere die Bestimmung einer *begründeten* Anzahl von betrachteten Perioden ist nicht gegeben. Vgl. dazu auch BOUSSOFIANE/DYSON/THANASSOULIS (1991) S. 9.

215) Vgl. ASMILD/PARADI/AGGARWALL ET AL. (2004) S. 69f. Siehe dazu auch Kapitel 3.4.

umfassend wie möglich definiert sein, damit bei der Datenerhebung so wenig wie möglich Interpretationsspielräume bestehen, die das Ergebnis verfälschen können²¹⁶). Zudem wird vorausgesetzt, dass keine DMU mit exakt den gleichen Werten mehrfach vorhanden ist, da dies die Lösung der Modelle erschwert, ohne einen Mehrwert zu erhalten²¹⁷). Dies liegt daran, dass mehrfach vorhandene, gleiche Transformationsprozesse keinerlei stärkere Gewichtung oder eine andere besondere Behandlung in den Modellen erhalten. Zwei DMUs mit exakt den gleichen Werten werden so auch exakt gleich in ihrer (In-)Effizienz bewertet. Deshalb reicht die Berechnung für eine dieser DMUs aus.

3.2 DEA-Technologien

Generell wird bei der DEA vorausgesetzt, dass es eine Produktionsfunktion (und somit auch eine (unbekannte) Technologie T_U) für den Untersuchungszweck gibt, die durch den effizienten Rand einer Technologie approximiert wird, die sich aus den DMUs und den entsprechenden Strukturannahmen der Modelle ergibt. Diese wird im Folgenden als T_{DMU} bezeichnet²¹⁸). Während CHARNES/COOPER/LEVIN/SEIFORD²¹⁹) anführen, dass über die zu Grunde liegende Produktionsfunktion (und damit T_U) keine Annahmen getroffen werden müssen, weisen DYCKHOFF/ALLEN²²⁰) darauf hin, dass zumindest T_{DMU} in T_U enthalten sein muss, ohne jedoch deren Struktureigenschaften vorauszusetzen. Somit muss T_{DMU} technisch realisierbar sein²²¹). Die Bildung von den möglichen T_{DMU} 's und ihre jeweiligen Annahmen wird im Folgenden untersucht. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die dabei anzunehmenden Struktureigenschaften nur für T_{DMU} gelten sollen. Selbst wenn die Daten der DMUs korrekt sind, ist dies problematisch, da zur Approximation von T_U nur das Wissen existiert, dass die DMUs in ihr enthalten sind. Wenn für T_{DMU} weitergehende Anforderungen an die Struktur gestellt werden müssen als für T_U , kann nicht gewährleistet werden, dass T_{DMU} noch vollständig in T_U enthalten ist (siehe bspw. Abbildung 7, Seite 33). Somit ist es angebracht, von den gleichen Mindestanforderungen für T_U wie auch für T_{DMU} auszugehen, was im Allgemeinen jedoch nicht erfolgt, da in der Literatur nur selten etwas über T_U oder deren Annahmen zu finden ist. Dies ist sicherlich dem Umstand zu verdanken, dass die DEA gerade mit möglichst wenigen a-priori²²²)-Annahmen auskommen „möchte“²²³). Dabei darf jedoch nicht außer Acht gelassen werden, dass die (vermeintlich geringe) Anzahl von (expliziten) Annahmen nicht automatisch etwas über die Güte der Ergebnisse aussagt²²⁴). Auf Seite 33 wird diese Problematik an Ab-

216) Dieser Punkt wird in Kapitel 3.3.5 behandelt.

217) Vgl. SCHEEL (2000) S. 49 - siehe dazu auch die Modelle selbst.

218) Vgl. CHARNES/COOPER (1984) S. 334, KLEINE (2001) S. 230, BOGETOFT (1996) S. 457 f.

219) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 5. Siehe dazu auch CHARNES/COOPER (1984) S. 334.

220) Vgl. DYCKHOFF/ALLEN (1999) S. 424.

221) Vgl. ALLEN (2002) S. 134.

222) A priori - von Vornherein

223) Als Beispiel seien hier die bereits zitierten Hinweise auf die fehlenden Annahmen über T_U , sowie TULKENS (1993) S. 186, Fußnote 8) und S. 206 sowie CHARNES/COOPER/GOLANY ET AL. (1985) S. 94 erwähnt, die die wenigen Annahmen als besonderen Vorteil betonen.

224) Siehe auch SCHMIDT (1985) S. 300: "[...] by using less information than in a parametric approach,

bildung 7 verdeutlicht.

3.2.1 Konvexe Hülle

Für einige²²⁵⁾ Modelle der DEA gilt als eine Grundannahme, dass T_{DMU} konvex ist²²⁶⁾. Konvexität²²⁷⁾ (CV) einer Technologie T liegt vor, wenn für alle p DMUs $(X_k, Y_k) \in T$, $k = 1, \dots, p$ gilt, dass für alle nichtnegativen Skalare mit $\lambda_k \geq 0$ und

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (33) \quad \text{auch} \quad \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k X_k, \sum_{k=1}^p \lambda_k Y_k \right) \in T \quad (34) \quad \text{zutritt.}$$

Das bedeutet, dass jede beliebige²²⁸⁾ Kombination verschiedener DMUs (genau genommen ihrer Input-/Outputtransformationen) auch in der Technologie T enthalten ist und somit der Rand der Technologie abschnittsweise linear verläuft²²⁹⁾. Der konvexe Rand von T_{DMU} und die daraus resultierende Produktionsfunktion können als *konvexe Hülle*²³⁰⁾ um die DMUs bezeichnet werden, da alle DMUs enthalten sind. Aber auch bei Konvexitätsverletzung gibt es mögliche Hüllen, die alle DMUs enthalten²³¹⁾.

Es ist zu beachten, dass auch unter Annahme von CRS die Bedingung (33) erfüllt wird, obwohl auch jedes beliebige positive Vielfache einer Input-/Outputkombination und somit auch jede Kombination dieser Vielfachen in der Technologie enthalten sind²³²⁾.

Wenn $(X, Y) \in T$, $\lambda \geq 0$, dann auch $(\lambda X, \lambda Y) \in T$ ²³³⁾.

Für NIRS und NDRS gilt Entsprechendes wie für Gleichung (28) beim BCC-Modell, nur NDRS erfüllt nicht die Konvexitätsannahme, da die beliebige Kombination zweier DMUs außerhalb der Technologie liegen kann (siehe Abbildung 4 und Definition von IRS²³⁴⁾).

Diese Anforderung ist auch deshalb für die DEA von Bedeutung, weil die normalerweise vorliegenden Daten nur einen sehr kleinen Teil der tatsächlichen Transformationsmöglichkeiten wiedergeben und somit die Technologie um beliebig viele Transformationsmöglichkeiten vergrößert werden kann. Dadurch entsteht jedoch das Problem, dass eine festgestellte Ineffizienz gegenüber einer solchen zusammengesetzten Transformationsmöglichkeit nicht immer realisierbar ist²³⁵⁾. Dies ist in der gegebenenfalls nur *angenommenen* Stetigkeit²³⁶⁾ begründet, die die beliebige Teilbarkeit der Input-/Outputfaktoren impliziert, wie es auch schon

results might be less precise [...]“.

225) Eine genaue Klärung, welche Modelle diese Annahme betrifft, folgt in Kapitel 3.2.5. Dort wird auch auf Modelle mit nicht-konvexen Technologien eingegangen.

226) Vgl. SCHEFCZYK (1996) S. 169.

227) „Convexity“ - vgl. BANKER/CHARNES/COOPER (1984) S. 1081.

228) Allerdings müssen sich die Anteile der DMUs zu 1 aufaddieren.

229) Vgl. SCHEFCZYK/GERPOTT (1994) S. 941 f. Siehe dazu auch das Beispiel aus Abbildung 4 in Kapitel 2.2.3.

230) An dieser Stelle sei nochmal auf die synonyme Benutzung von Hülle und Rand hingewiesen. Siehe Fußnote 64).

231) Siehe FDH-Modell.

232) Siehe Punkt 1 in Kapitel 2.2.3.2.

233) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 42.

234) Siehe Kapitel 2.2.3.2.

235) Vgl. SCHEEL (2000) S. 47.

236) Auf den Begriff der Stetigkeit wird in Kapitel 3.3.1 eingegangen.

bei der Definition der Produktionsfunktionen vorausgesetzt wurde²³⁷⁾.

3.2.2 Verschwendbarkeit - Disposability

Eine übliche Anforderung an die zu Grunde liegende Technologie ist das Vorliegen der *freien Verschwendbarkeit*²³⁸⁾ (FD, „free/strong disposability“). Das bedeutet, dass jede mögliche Input-/Outputtransformation auch mit größeren Inputmengen und/oder mit kleineren Outputmengen möglich ist. Die freie Verschwendbarkeit in In- und Outputs liegt vor, wenn Folgendes gilt²³⁹⁾:

1. Wenn $(X, Y) \in T$ und $X' \geq X$, dann auch $(X', Y) \in T$ (*freie Verschwendbarkeit der Inputs*)
2. Wenn $(X, Y) \in T$ und $Y' \leq Y$, dann auch $(X, Y') \in T$ (*freie Verschwendbarkeit²⁴⁰⁾ der Outputs*).

Diese Anforderung impliziert jedoch, dass ausschließlich alle In- und Outputs als erwünschte Faktoren angesehen werden, da eine Verschwendung von In- oder Outputs dazu führt, dass weniger Outputs erzeugt bzw. mehr Inputs benötigt werden, als es bei einer effizienten Transformation erforderlich wäre. Dies wird auch in dieser Arbeit bis auf weiteres angenommen. Ausnahmen werden noch behandelt²⁴¹⁾. Ein Gegenbeispiel ist bei einem Produktionsprozess auftretender, ökologisch wie ökonomisch unerwünschter Abfall, der bei gleichen Inputs wegen entgegenstehender technischer Restriktionen nicht weniger produziert werden kann²⁴²⁾.

Alle hier behandelten DEA-Modelle unterliegen bis zu einem bestimmten Grad der freien Verschwendbarkeits-Annahme, da die Technologien der jeweiligen Modelle durch diese Annahme gebildet werden²⁴³⁾. Die Aussage zur Bedeutung der Erweiterung der Transformationsmöglichkeiten, die die freie Verschwendbarkeit impliziert, gilt entsprechend wie im vorigen Abschnitt.

Unterschieden werden kann noch die sog. *schwache Verschwendbarkeit* („weak disposability“). Diese liegt vor, wenn die Verschwendung eines Inputs (bei unveränderten Outputs) nur mit gleichzeitiger, proportionaler Reduzierung der anderen Inputs einhergeht. Entsprechendes gilt für die Outputs²⁴⁴⁾.

In diesem Zusammenhang stehen auch die sog. *Überfüllungseffekte* („congestion“). Diese

237) Siehe dazu auch Kapitel 2.2, Seite 4.

238) Diese Benutzung (oder Übersetzung) des Wortes *Verschwendbarkeit* für „disposability“ ist SCHEEL (2000) S. 45 ff. entnommen.

239) Vgl. BANKER (1984) S. 39, FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1994) S. 38 ff., FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985) S. 25 f.

240) Verschwendbarkeit ist in diesem Sinne so gemeint, dass man Outputs dahingehend verschwendet, in dem man sie weniger produziert als es möglich wäre.

241) Siehe dazu Kapitel 3.3.7 und „Objekte als Gut“ in Kapitel 2.1 auf Seite 3.

242) Vgl. ALLEN (2002) S. 102, FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985) S. 26.

243) Vgl. BANKER (1984) S. 39 für CCR/BCC, vgl. CHARNES/COOPER/GOLANY ET AL. (1985) S. 94 ff. für das Add- und somit auch RAM-Modell, vgl. KERSTENS/EECKAUT (1999) S. 211 für das FDH-Modell, siehe Kapitel 3.2.5 für die multiplikativen Modelle. Auf die Einschränkungen bei dem Add-Modell und somit auch bei RAM und den multiplikativen Modellen wird noch eingegangen.

244) Vgl. FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985) S. 25 f., FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1994) S. 38 ff.

liegen vor, wenn die Reduzierung mindestens eines Inputs in der Erhöhung mindestens eines Outputs resultiert oder entsprechend die Erhöhung mindestens eines Inputs die Reduzierung mindestens eines Outputs zu Folge hat²⁴⁵). Dieser Effekt lässt sich bspw. in einer Mine beobachten, bei der die Erhöhung der Mitarbeiterzahl zur gegenseitigen Behinderung und geringerem Output führt²⁴⁶) oder bei zu starker Bewässerung in der Landwirtschaft, bei der die Pflanzen eingehen²⁴⁷).

Die freie Verschwendbarkeit impliziert die schwache Verschwendbarkeit²⁴⁸). Jedoch ist ersichtlich, dass Überfüllungseffekte im Widerspruch zu beiden Verschwendbarkeitsannahmen stehen, da bspw. aus einer Reduzierung von Inputs eine Erhöhung von Outputs resultiert. Obwohl SCHEEL der Meinung ist, dass ein Überfüllungseffekt erst bei extremer Erhöhung einzelner Inputs auftritt und deshalb üblicherweise in der DEA nicht berücksichtigt wird²⁴⁹), gibt es bereits modifizierte DEA-Varianten, die diesen Effekt modellieren können²⁵⁰). Solche Modifikationen sind jedoch nur im Bereich der jeweiligen höchsten gemessenen Inputs möglich, damit sie nicht die Konvexitätsannahme verletzen. Zudem werden neuartige Modelle benutzt, deren Betrachtung hier zu weit führen würde²⁵¹).

3.2.3 Minimale Extrapolation

Eine weitere Anforderung an die DEA-Technologie ist die *minimale Extrapolation*²⁵²) (ME). Das bedeutet, dass alle beobachteten Daten/DMUs in der Technologie enthalten sein müssen. Sie ist zugleich die minimale Technologie, die die spezifizierten Annahmen (bspw. Skalenertragsannahme) erfüllt. Auf diese Anforderung ist deshalb hinzuweisen, da dies ein wesentlicher Punkt ist, der die DEA von parametrischen Ansätzen unterscheidet. Auf die Probleme mit dieser Annahme wird im folgenden Abschnitt noch eingegangen.

3.2.4 Probleme mit der relativen Effizienz und der konvexen Hülle

Eine ausschließlich aus diesen drei Anforderungen (konvexe Hülle, freie Verschwendbarkeit, minimale Extrapolation) gebildete Technologie trifft nur bei Annahme von VRS zu. Bei den Skalenertragsannahmen CRS und NIRS sind diese drei Anforderungen jedoch enthalten²⁵³). Abbildung 7 (a) beinhaltet eine Produktionsfunktion (schwarzer Rand) / Technologie (zusätzlich der schraffierte Bereich), die bspw. die Transformation von Programmierer-Arbeitsstunden (Input x) in Programmzeilen (Output y) bezogen jeweils auf eine Woche darstellen. Der Verlauf der Funktion kann so erklärt werden, dass bis x_1 (z.B. 40 Stunden) nur ein einziger Programmierer an einer Aufgabe arbeitet und er deshalb proportional zu der investierten Zeit

245) Vgl. COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 17, COOPER/DENG/GU ET AL. (2001) S. 228.

246) Vgl. COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 17, TONE/SAHOO (2004) S. 757.

247) Vgl. FÄRE/JANSSON (1976) S. 414 f.

248) Vgl. SCHEEL (2000) S. 45.

249) Vgl. SCHEEL (2000) S. 45.

250) Vgl. bspw. COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 18 ff., WEI/YAN (2004) S. 646 ff.

251) Vgl. COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 18 ff., COOPER/SEIFORD/ZHU (2000) S. 5 ff.

252) „Minimum extrapolation“, vgl. BANKER (1984) S. 39.

253) Vgl. SCHEEL (2000) S. 53.

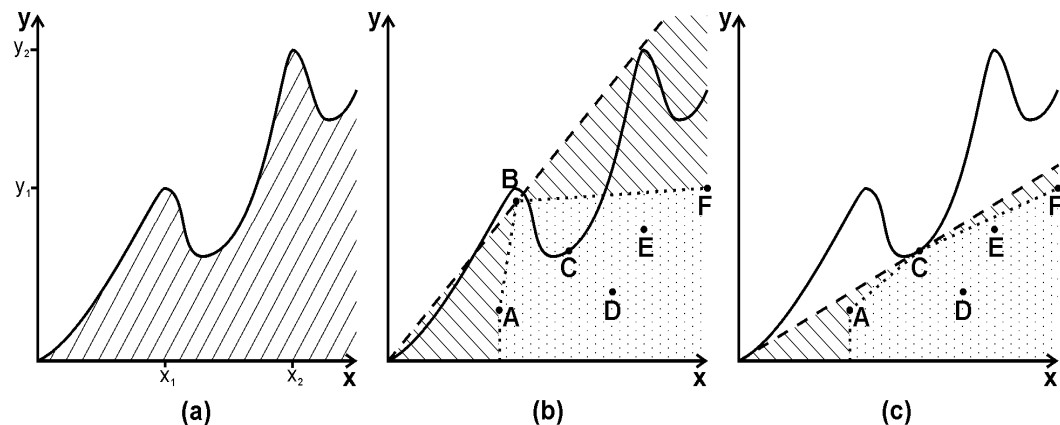


Abbildung 7: Beispiel für eine Produktionsfunktion/Technologie und mögliche DMUs

In diesem 1-Input/1-Output-Fall sind in (b) und (c) die möglichen CRS- oder VRS-Technologien unter den Anforderungen der DEA eingezeichnet.

Eigene Erstellung

Programmzeilen erzeugt. Ab x_1 wird jedoch ein weiterer Programmierer hinzukommen, da keine Überstunden vorgesehen sind. Nun fällt die Funktion ab, weil der größere Kommunikationsaufwand unter den beiden Programmierern den ersten mehr von seiner Arbeit, Programmzeilen zu erzeugen, abhält, als der zweite Programmierer mit seiner relativ kleinen Stundenzahl aufholen könnte. Dies ist somit ein *lokal* vorliegender Überfüllungseffekt. Erst bei größerer Stundenzahl (x_2 entspräche dann 80 Stunden) ist der Output wieder deutlich höher (wobei in diesem Beispiel y_2 nicht das Doppelte von y_1 darstellt, da der Kommunikationsaufwand immer noch den Programmierzeilen-Output drückt). Die DMUs A bis F (Abbildung 7 b/c) könnten zum Beispiel verschiedene (kleinere) Projekte eines Softwareunternehmens darstellen, die jeweils einen bestimmten Stellenschlüssel zugeteilt bekommen. Anzu-merken ist hier, dass keine - weder freie noch schwache - Verschwendbarkeit vorliegt, da bspw. die DMU B mit mehr Input nicht den gleichen Output erzeugen kann²⁵⁴⁾.

In Abbildung 7 (b) sind die Technologien auf Grund der von CRS- und VRS-Skalenertragsannahmen eingezeichnet. Der schraffierte und gepunktete Bereich mit der gestrichelten Begrenzungslinie ist die konstruierte Technologie bei Annahme von CRS. Dabei würde die DMU C deutlich als ineffizient betrachtet werden, was im Verhältnis zur realen Produktionsfunktion nicht der Fall ist.

Zum anderen sieht man die Problematik, die durch die Konvexitätsannahme der VRS zum Tragen kommt. Der gepunktete Bereich und der gepunktete Rand geben die konstruierte Technologie unter dieser Bedingung an. Somit wären die DMUs A, B und F effizient, während die DMUs C, D und E als ineffizient bezeichnet würden, da sie deutlich unterhalb der gepunkteten Linie liegen. An der realen Produktionsfunktion gemessen sähe dies wiederum für die DMU C und insbesondere für die DMU F anders aus.

254) Allerdings ist dies Aussage nicht ganz korrekt, da es sehr wohl eine lokale Umgebung um den Punkt B gibt, in denen Verschwendbarkeit vorliegt. In diesem Zusammenhang bezieht sich die Aussage auf die tatsächliche Produktionsfunktion der Abbildung (a) und ist globaler zu sehen.

In Abbildung 7 (c) ist der Fall unter der Annahme skizziert, dass die DMU B nicht existiert oder deren Daten nicht herangezogen wurden, weil z.B. angenommen wurde, es handle sich um fehlerhafte Daten²⁵⁵). Nun ist zu sehen, dass die CRS-/VRS-Technologien vollständig innerhalb der realen Technologie liegen, so wie es DYCKHOFF/ALLEN fordern. Alle DMUs bis auf D sind annähernd effizient, aber für die DMUs A, E und F ist dies im Vergleich zur „realen“ Produktionsfunktion eher unpassend. Zudem ist ersichtlich, dass auf Basis der beobachteten DMUs (ohne B) die freie Verschwendbarkeit angenommen werden kann, da für keine DMU der freie Verschwendbarkeitsbereich außerhalb der realen Technologie liegt. Gleichzeitig ist die Problematik der minimalen Extrapolations-Annahme zu erkennen. Da die Technologien „minimal“ im Verhältnis zu ihren Annahmen sind, ergeben sich Unterschiede zu der realen Produktionsfunktion (Technologie), die selbst bei größerem Wissen über deren Verlauf nicht berücksichtigt werden können²⁵⁶).

Diese Beispiele sollen zeigen, wie problematisch die relative Effizienz im Verhältnis zur Effizienz gemessen an der Produktionsfunktion sein kann, wenn verschiedene Annahmen der DEA zu Grunde liegen. Zudem ist durch die beispielhafte Weglassung von DMU B ersichtlich, dass die DEA sehr sensibel gegenüber den zur Anwendung kommenden Daten ist, da durch die minimale Extrapolations-Annahme keine anderen Technologien gebildet werden. Zugleich darf aber nicht außer Acht gelassen werden, dass gerade die minimale Extrapolations-Annahme Objektivität verspricht, da diese nur auf Grund der beobachteten Daten die Technologie definiert.

3.2.5 DEA-Modelle und ihre Technologien

Die Anforderungen der minimalen Extrapolations-Annahme und der freien Verschwendbarkeits-Annahme stellen alle vorgestellten Modelle der DEA an die zu Grunde liegende Technologie²⁵⁷). Das Add-, CCR-, BCC- und RAM-Modell erfordern darüber hinaus die Konvexitäts-Annahme, da die Effizienzbetrachtungen auf dieser Annahme basieren²⁵⁸). Das FDH-Modell verzichtet auf diese, da trotz der Konvexitätsbedingung jede DMU nur im Verhältnis zu einer anderen, realen DMU verglichen wird²⁵⁹).

Auch für die multiplikativen Modelle gilt die Konvexitäts-Annahme. Bei diesen Modellen wird die konvexe Hülle auf die logarithmisierten Daten angewendet²⁶⁰). Daher steht die Konvexitäts-Annahme in Bezug auf die Ausgangsdaten im Widerspruch, wie gleich an Abbildung 8 gezeigt wird. Dies ergibt sich daraus, dass es bei der Betrachtung der ursprünglichen (nicht-logarithmisierten) DMUs durchaus vorkommen kann, dass die effizienten DMUs bei Anwendung des CCR- oder BCC-Modells nicht im Sinne der multiplikativen Modelle effizient sind.

255) Siehe dazu Kapitel 3.3.5.

256) Ein Ansatz, der diesen Missstand zu beheben versucht, ist in Kapitel 3.5 beschrieben.

257) Auf Einschränkungen wird in diesem Abschnitt noch eingegangen.

258) Vgl. BOGETOFT (1996) S. 458.

259) Vgl. TULKENS (1993) S. 184 f., BOGETOFT (1996) S. 458. Siehe Gleichung (32).

260) Siehe Modelldefinitionen (Anhang 3).

Dies ergibt sich durch die log-linearen Abschnitte beim VarMult- oder die Cobb-Douglas-Abschnitte beim InvMult-Modell. Zur Verdeutlichung der Unterschiede sind in Abbildung 8 die verschiedenen „Hüllen“/Effizienzränder im 1-Input/1-Output-Fall skizziert (die Technologie befindet sich rechts-unterhalb der jeweiligen Ränder). Die folgenden Betrachtungen lassen sich auch auf den mehrdimensionalen Input-/Output-Fall übertragen.

Abbildung 8 (a) zeigt als durchgezogene Linie den effizienten Rand der abschnittsweisen Cobb-Douglas-Funktion²⁶¹⁾ des InvMult-Modells. Die gestrichelte Linie steht für den effizienten Rand des VarMult-Modells, die gepunktete Linie dient als Orientierung und stellt den effi-

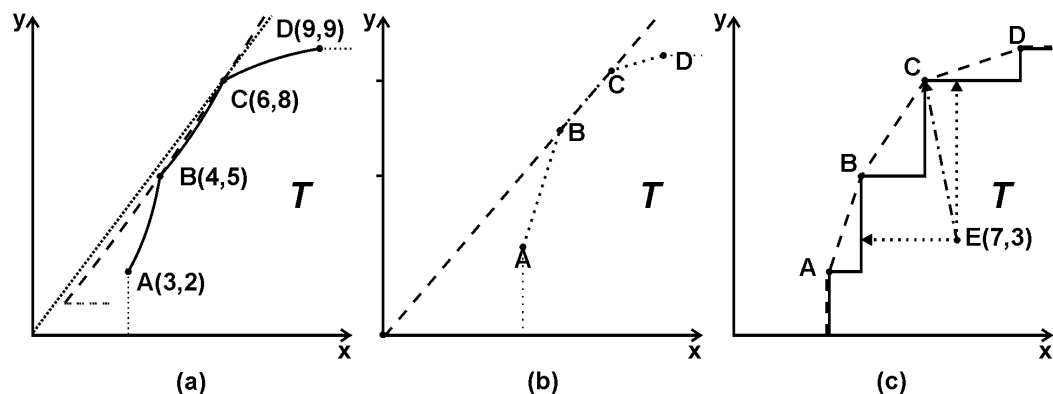


Abbildung 8: Verschiedene Effizienzränder am Beispiel eines 1-Input/1-Outputfalles

Die in Klammern gesetzten Werte der DMUs A bis D oder E in (a) geben die x, y -Koordinaten an - in (a) ist der effiziente Rand der multiplikativen Modelle nicht maßstabsgetreu wiedergegeben, um so die Tendenz zu verdeutlichen. (b) gibt die logarithmisierten DMUs wieder.

Eigene Erstellung, zum Teil in Anlehnung an CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 30/TULKENS (1993) S. 188.

effizienten Rand des CCR-Modells dar²⁶²⁾. Es ist zu erkennen, dass die leicht gekrümmten Cobb-Douglas-Abschnitte in (a) andere Effizienzränder darstellen, als die abschnittsweisen linearen Ränder bei VRS (gestrichelt) in (c). In Abbildung 8 (b) sind die DMUs aus (a) logarithmiert (Logarithmus Naturalis (ln)) eingezeichnet und die Achsen zur besseren Lesbarkeit vierfach gestreckt. Die gepunktete Linie ist die Entsprechung zum Cobb-Douglas-Rand aus (a), die gestrichelte Linie gibt den effizienten Rand im Sinne des VarMult-Modells wieder. Es ist zwar schwer zu erkennen, aber die gestrichelte Linie, die unter Annahme von CRS den effizienten Rand darstellt, verläuft durch B und nicht durch C. Bei Anwendung von \ln ²⁶³⁾: $\ln x_B = 1,3862$, $\ln y_B = 1,6094$, $\log x_C = 1,7918$, $\log y_C = 2,0794$. Somit beträgt die Steigung des Effizienzrandes von (b) 1,1610. Die Gerade verläuft durch B. Falls sie durch C verlaufen würde, betrüge die Steigung nur 1,1606. Das bedeutet, dass B im Sinne des VarMult als effizient anzusehen ist und nicht C. Dies ist in dem leicht anders verlaufenden log-linearen Effizienzrand begründet und auch in (a) ansatzweise zu erkennen.

In Abbildung 8 (c) ist die DMU E eingezeichnet. Durch die Zielfunktion des Add-Modells wer-

261) Bspw. gilt für den Abschnitt zwischen DMU A und B: $x = 3^\alpha * 4^{(1-\alpha)}$, $y = 2^\alpha * 2^{(1-\alpha)}$ für $0 < \alpha < 1$.

262) Die jeweiligen die Technologie begrenzenden Ränder sind angedeutet.

263) Wobei theoretisch der Logarithmus zu irgendeiner Basis ≥ 1 möglich ist. Die Ergebnisse sind auf die 4. Nachkommastelle gerundet, es wurde jedoch mit größerer Genauigkeit weiter gerechnet.

den die Input-/Outputslacks maximiert und somit ein maximaler Ineffizienzabstand zu Grunde gelegt; in diesem Beispiel zur DMU C²⁶⁴). Durch die fehlende Erhaltung des Input-/Output-Mix (da nur die Slacks in der Zielfunktion stehen) ist der effiziente Rand der Technologie allein durch die Kombination der effizienten DMUs bestimmt. Dies bedeutet aber auch, dass die effizienten DMUs zwar die gleichen sind wie bei der VRS-Technologie des BCC-Modells²⁶⁵), nur dass der durch die freie Verschwendbarkeits-Annahme definierte effiziente Rand - in diesem Beispiel - unterhalb von DMU A oder rechts von DMU D nicht zur Effizienzbetrachtung herangezogen wird. Daraus kann gefolgert werden, dass die freie Verschwendbarkeits-Annahme nur bis zu den beobachteten (ineffizienten) DMUs zur Technologiebestimmung benötigt wird. Dies ist somit die Einschränkung der freien Verschwendbarkeits-Annahme für alle auf dem Add-Modell basierenden DEA-Modelle, wie dem RAM und dem InvMult-Modell. Praktisch hat dies jedoch wenig Bedeutung, da auf Grund der Unbekanntheit der Technologie T_u und somit der grundsätzlich möglichen Produktionsaktivitäten nicht ausgeschlossen werden kann, dass nicht eine DMU mit minimalen Input- und/oder maximalen Outputwerten existiert oder existieren könnte. Somit wird auch die freie Verschwendbarkeits-Annahme für diese Modelle angenommen²⁶⁶).

Der effiziente Rand des VarMult-Modells verläuft in (a) von dem Punkt (1,1) an, da $\log 1 = 0$ oder die Umkehrung $e^0=1$ gilt. Kleinere Werte kommen wegen des Logarithmus für das VarMult-Modell nicht in Frage. Somit hängt der effiziente Rand „in der Luft“. Von der freien Verschwendbarkeit in den Ausgangsdaten kann deshalb nur beschränkt (≥ 1) ausgegangen werden, da die Werte nicht kleiner 1 werden dürfen. Für das VarMult-Modell ist der Fall etwas anders gelagert, da die Konvexitätsbedingung dafür sorgt, dass Effizienzvergleiche nur im Verhältnis zu Konvex-Kombinationen von - in diesem Falle logarithmisierten - DMUs erfolgt. Auf die Abbildung 8 (a) übertragen sind also nur Effizienzvergleiche in Bezug auf den bereits eingezeichneten Rand möglich, der sich ohnehin nur aus den beobachteten DMUs ergibt (ohne die gepunkteten Ergänzungen). Dies ist dadurch begründet, dass das InvMult-Modell nur die Anwendung des Add-Modells auf die logarithmisierten Daten ist. Somit gilt auch die Beschränkung der freien Verschwendbarkeits-Annahme des Add-Modells. Allerdings ist es im Gegensatz zu dem VarMult-Modell durch die sog. Einheitenunabhängigkeit²⁶⁷) möglich, kleinere Werte als 1 durch Multiplikation eines genügend großen Faktors in eine entsprechend große Zahl > 1 zu überführen, so dass die Faktoren der DMUs auch kleinere Werte als 1 annehmen können.

In Abbildung 8 (c) sind der Rand des FDH-Modells (durchgezogene Linie) und der Rand ei-

264) Dies ist gekennzeichnet durch den abwechselnd gepunkteten und gestrichelten Pfeil.

265) Vgl. COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 12.

266) In der Literatur sind nur selten Hinweise auf die geringeren Anforderungen des Add-Modells zu finden, z.B. bei CHARNES/COOPER/GOLANY ET AL. (1985) S. 93f. Dagegen wird bei COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 92, CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 23 ff., SCHEEL (2000) S. 52 nicht zu der freien Verschwendbarkeits-Annahme bei der VRS-Technologie unterschieden.

267) Siehe dazu Kapitel 3.3.2.

ner unter der Annahme von VRS beim BCC-Modell gebildeten Technologie (gestrichelte Linie) eingezeichnet. Es ist zu sehen, dass der VRS-Rand den FDH-Rand vollständig beinhaltet. Dies gilt auch generell, da die Technologie von FDH nur durch alle DMUs und die freie Verschwendbarkeits-Annahme gekennzeichnet ist²⁶⁸). Die daraus resultierende „Treppenform“ der FDH-Hülle ist ebenfalls zu erkennen. Die waagerechten und senkrechten (gepunkteten) Pfeile deuten jeweils den input- bzw. outputorientierten Bezugspunkt für die DMU E an, der bei der Effizienzbestimmung im FDH-Modell relevant ist.

Auf die Auswahl der verschiedenen Technologien wird in Kapitel 4 eingegangen, die folgende Tabelle gibt die technologiebedingten Anforderungen an.

	CCR	BCC	Add	RAM	VarMul	InvMult	FDH
Konvexität	+	+	+	+	log	log	-
freie Verschwendbarkeit	+	+	(+)	(+)	(+)	(+)	+
minimale Extrapolation	+	+	+	+	+	+	+
Hülle ist abschnittsweise	linear	linear	linear	linear	log-linear	Cobb-Douglas	linear
Skalenertragsannahme	CRS	VRS	VRS	VRS	Log-CRS	Log-VRS	keine

+ benötigte Anforderung, (+) generell benötigte Anforderung, - nicht benötigte Anforderung

Tabelle 2: Annahmen der jeweiligen DEA-Modelle in Bezug auf die Technologien

3.3 Input-/Outputfaktoren und deren Daten

3.3.1 Maßskalen

Die Input-/Outputdaten können grundsätzlich auf den drei folgenden Maßskalen definiert sein²⁶⁹:

1. Nominalskala: Die Daten unterliegen keiner Rangfolge (daraus folgen jeweils Binärdaten, die nur den Wert 1 oder 0 annehmen können).
2. Ordinalskala: Die Daten können in eine Rangfolge gebracht werden, die Abstände untereinander sind jedoch irrelevant (1,2,3,...).
3. Kardinalskala oder auch metrische Skala: Die Daten unterliegen einer Rangfolge und zusätzlich sind Abstände zwischen den Daten vergleichbar (z.B. Entfernung in Meter).

Zusätzlich kann zwischen stetigen und diskreten Daten unterschieden werden. Diskret bedeutet, dass es endlich viele oder höchstens abzählbar unendlich viele Datenausprägungen gibt. Stetig bedeutet dagegen, dass jede beliebige Datenausprägung in einem Bereich zulässig ist.

SCHEEL hält die Messbarkeit für die einzige formale Voraussetzung für die Daten zur Anwendung der DEA²⁷⁰). Dies greift jedoch zu kurz, da zwar Berechnungen mit jeglichen Daten möglich sind, diese jedoch zu Problemen führen, da bisweilen immer implizit von stetigen

268) Vgl. KERSTENS/EECKAUT (1999) S. 211 und S. 213, THRALL (1999) S. 244.

269) Nach ASSENMACHER (1998) S. 18 ff. und HARTUNG (1999) S. 16 ff.

270) Vgl. SCHEEL (2000) S. 19.

Technologierändern ausgegangen wurde²⁷¹). Wenn beispielsweise als ein Input die Existenz eines Drive-Through-Schalters angenommen wird²⁷²), so würde eine gegenüber einer Vergleichs-DMU auf der Effizienzhülle festgestellte Ineffizienz schwierig zu interpretieren sein, wenn die Vergleichs-DMU bspw. als Inputwert für den Drive-Through-Schalter 0,4 besäße²⁷³). Der ineffizienten DMU ist es praktisch nicht möglich, die Ineffizienz durch „Anpassung“ auf 0,4 Drive-Through-Schalter zu erreichen. Ähnliches gilt für die ordinalen Werte, da bspw. Platz 3,7 auf einer ordinalen Skala nicht existiert. Das bedeutet aber, dass keine diskreten sondern nur stetige Daten vorliegen dürfen²⁷⁴) und nominale oder ordinale Daten dies nicht erfüllen. Stetigkeit kann nur in den seltensten Fällen angenommen werden, da die beliebige Teilbarkeit sehr selten in der Praxis vorkommt. Daher muss zumindest gewährleistet sein, dass eine hinreichende Approximation vorgenommen werden kann²⁷⁵). Wie hierbei *hinreichend* definiert ist, muss der Anwender selbst entscheiden. Denkbar ist bspw., den Genauigkeitsverlust durch die *nur angenommene* Stetigkeit ins Verhältnis zu der kleinsten Differenz in den berechneten Effizienzwerten zu setzen. Es ist zu beachten, dass sich bei mehreren Faktoren, deren Stetigkeit nur angenommen wird, die Ungenauigkeit potenzieren kann. Im Folgenden werden zwei Ansätze zum Umgang mit nicht-kardinalen Daten beschrieben.

Klassenvergleichsansatz

CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL.²⁷⁶) schlagen eine Modifikation der Modelle dahingehend vor, Kategorien/Klassen von DMUs zu bilden, die den jeweiligen Nominal- oder Ordinalwerten entsprechen. Diese werden dann nur untereinander oder - bei ordinalen Werten - immer nur mit den „schlechter“ kategorisierten DMUs verglichen. Falls kein Vergleich von Kategorien möglich ist, so fordern sie eine getrennte Auswertung.

Programmvergleichsansatz

Ein anderer Ansatz von CHARNES/COOPER/RHODES²⁷⁷) unterscheidet zwischen - in diesem speziellen Falle - der betriebswirtschaftlichen („managerial“) und der Programm-Effizienz²⁷⁸), weil die DMUs unter zwei verschiedenen Grundvoraussetzungen operieren. Zuerst wird deshalb die Ineffizienz gegenüber den DMUs des gleichen Programms²⁷⁹) bestimmt (=“managerial efficiency“) und jede ineffiziente DMU auf die entsprechende virtuelle Vergleichs-DMU projiziert. Diese virtuellen Vergleichs-DMUs werden dann mit allen programmübergreifenden (virtuellen Vergleichs-)DMUs verglichen, um daraus die Ineffizienz des Programms für diese

271) Siehe Kapitel 2.2.

272) Vgl. BANKER/MOREY (1986) S. 1614.

273) Dann würde es sich definitiv um eine „virtuelle“ Vergleichs-DMU handeln.

274) Vgl. ALLEN (2002) S. 149, siehe auch Kapitel 2.2.

275) Vgl. CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000B) S. 4.

276) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 53 f.

277) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1981) S. 668 ff.

278) Dabei ging es um einen Vergleich von öffentlichen Schulen in den USA für behinderte Schüler, bei dem die Schulen an einem besonderen Förderungs-Programm („Program Follow Through“) teilnehmen konnten. Die (Nicht-)Teilnahme an diesem Programm sollte für die managerial-Effizienz keine Auswirkung haben.

279) Siehe Fußnote 278).

DMU zu bestimmen. Dies ist ebenfalls eine modellunabhängige Vorgehensweise, die allerdings im zweiten Teil auf die Bestimmung der Ineffizienz gegenüber einem bestimmten kategorisierenden Inputfaktor abzielt und daher die Ineffizienz aufteilt.

Somit ist bei Vorliegen von nicht-kardinalen Daten eine gemeinsame Auswertung nur bedingt möglich und modellunabhängig. Daher können generell nicht-kardinale Input- oder Outputdaten nur dann zugelassen werden, wenn durch die daraus zu bildenden Kategorien noch genügend große DMU-Klassen übrig bleiben²⁸⁰). Auf die Auswahl eines bestimmten Modells hat dies jedoch keine Auswirkungen.

Nicht-stetige, aber kardinale Daten sind dann zulässig, wenn die dadurch entstehenden Ungenauigkeiten zu vernachlässigen sind. Kosten können bspw. als stetig angenommen werden, da sich die betrachteten Fälle meist in so großen Zahlenräumen bewegen, dass die Unstetigkeit vernachlässigt werden kann²⁸¹).

3.3.2 Einheiten

Für viele DEA-Modelle sind in der Literatur Aussagen zu finden, dass die jeweiligen Einheiten der Daten irrelevant sind („Einheitenunabhängigkeit“ - „units invariant“)²⁸²). Dies bedeutet, dass die Ergebnisse nicht davon abhängen, ob bspw. die Daten in Euro oder Dollar angegeben werden, solange konsistent bei allen DMUs die gleichen Einheiten für die entsprechenden Daten gelten. Allerdings gilt dies nur für lineare (positive) Transformationen, d.h. die jeweiligen Einheiten müssen allein durch einen positiven (Umrechnungs-)Faktor linear umrechenbar sein²⁸³). Ein Gegenbeispiel sind Angaben der Temperatur (Celsius, Fahrenheit, Kelvin), bei denen eine Umrechnung nicht durch einen linearen Faktor erfolgen kann. Somit sind solche Daten für die DEA nicht geeignet, da sonst durch die subjektive Wahl einer Einheit das Ergebnis verfälscht werden kann.

Aber diese Aussagen wurden zum Teil widerlegt. Das BCC- und das CCR-Modell sind nur einheitenunabhängig im Bezug auf ihre radiale Komponente. Die Slacks - falls vorhanden - sind nicht einheitenunabhängig, da diese sich direkt auf die In- oder Outputs und somit auch auf ihre Einheiten beziehen²⁸⁴). Dies hat bei den beiden Modellen jedoch praktisch wenig Bedeutung, da die Slacks primär dazu dienen, zu erkennen, ob neben der rein radialen Effizienz noch eine gemischte (In-)Effizienz vorliegt und dieses ohnehin in der Praxis selten vorkommt²⁸⁵). Zudem ändert sich der berechnete Effizienzwert θ durch die Slacks nicht. Daher werden diese beiden Modelle als einheitenunabhängig angesehen. Die Einheitenunabhängigkeit der radialen Komponente kann bspw. anhand der Gleichungen (12) bis (15) gezeigt

280) Dieser Punkt wird noch in Kapitel 3.4 behandelt. Hierbei ist es jedoch wieder eine Definitionsfrage des Anwenders, was eine „genügend große“ DMU-Klasse ist.

281) Siehe dazu Kapitel 2.2.

282) Vgl. bspw. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 45, COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 24, S. 102.

283) Vgl. SCHEEL (2000) S. 82.

284) Vgl. LOVELL/PASTOR (1995) S. 148 und S. 150.

285) Siehe dazu Kapitel 2.2.3.1.

werden. Falls Input-/Outputwerte mit positiven Faktoren multipliziert werden, ändern sich weder die Zielfunktion noch die Nebenbedingungen, da dieser Vorgang, ohne die Gleichungen zu verletzen, durch einfache Division der Faktoren wieder rückgängig gemacht werden kann. Für die anderen Orientierungen oder das BCC-Modell und FDH-Modell gilt dies entsprechend²⁸⁶⁾. Zu beachten ist jedoch, dass sich die Koeffizienten der optimalen Lösung in der Multiplier Form sehr wohl ändern, da andernfalls die Nebenbedingungen nicht mehr erfüllt sind.

Die Einheitenunabhängigkeit trifft *nicht* bei dem Add-Modell und dem VarMult-Modell zu²⁸⁷⁾. Dies ist ebenfalls durch die nicht einheitenunabhängigen Slacks begründet. Ein einheitenunabhängiges Modell ist das InvMult-Modell²⁸⁸⁾. Dies ist durch die Translationsinvarianz²⁸⁹⁾ des Add-Modells begründet, aus welcher wegen der logarithmisierten Input-/Outputfaktoren die Einheitenunabhängigkeit folgt (siehe dazu den Beweis in Anhang 4)²⁹⁰⁾.

Das RAM-Modell wurde (unter anderem) wegen der fehlenden Einheitenunabhängigkeit des Add-Modells entwickelt²⁹¹⁾. Eine lineare Einheitentransformation betrifft sowohl die Slacks als auch in entsprechender Weise die Spannweite. Die Division der Slacks durch die Spannweite hebt diesen Effekt auf²⁹²⁾.

Die Einheitenunabhängigkeit ist eine wesentliche Voraussetzung für die sinnvolle Anwendung eines Effizienzmaßes, denn andernfalls kann nicht ausgeschlossen werden, dass die festgestellten Effizienzwerte allein durch die Abänderung von Maßeinheiten verändert werden können. Es besteht zudem das Dilemma, dass die Stetigkeit für einheitenlose Daten eher selten vorkommt, diese aber Voraussetzung für die Anwendung der DEA ist. So müssen entweder hinreichend große Zahlen vorliegen²⁹³⁾ oder die Daten durch eine Einheit gekennzeichnet sein. Wenn bspw. ein Inputwert in DM gemessen worden ist, so dürfte sich durch die Euroumstellung im Jahr 2002 und die entsprechende Abänderung der Daten der Effizienzwert nicht ändern. Sonst wäre ein solcher Wert nutzlos für den Anwender, denn jede Effizienzbetrachtung kann durch Hinterfragen der Einheitenwahl ad absurdum geführt werden. Zur Erreichung möglichst großer Objektivität ist daher ein einheitenunabhängiges Modell zu bevorzugen, da sonst immer die Gefahr besteht, durch die Einheitenwahl die Ergebnisse zu manipulieren oder zu verändern. Insbesondere bei dem einheitenabhängigen Add-Modell ist darauf zu achten, dass durch zusätzliche Modifikationen (z.B. Preisinformationen für die einzelnen Slacks²⁹⁴⁾) eine Interpretation der Ergebnisse möglich ist, da die Slacks nur nach ihrem absoluten Wert in das Ergebnis einfließen. So geht jedoch der Vorteil des

286) Vgl. SCHEEL (2000) S. 117 f.

287) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 45, LOVELL/PASTOR (1995) S. 148.

288) Vgl. LOVELL/PASTOR (1995) S. 148.

289) Wird im folgenden Kapitel 3.3.3 erklärt.

290) Zum Ausgangsmodell siehe auch Anhang 3.

291) Vgl. PASTOR (1996) S. 6 ff.

292) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 19 ff. - siehe auch Anhang 3.

293) Siehe Kapitel 3.3.1 zur Annahme der Stetigkeit.

294) Vgl. STEINMANN/ZWEIFEL (2001) S. 139.

nicht-parametrischen Ansatzes durch die zusätzliche Einführung von Parametern (Preisinformationen) verloren.

Trotzdem wird die Einheitenunabhängigkeit hier nur als Präferenz des Anwenders behandelt, da dieser wegen der praktisch sehr seltenen einheitenlosen Anwendung sich ohnehin subjektiv entscheiden muss, ob diese für ihn relevant ist oder nicht.

3.3.3 Wertebereiche

Alle hier vorgestellten DEA-Modellformulierungen erfordern zumindest die Verwendung von nicht-negativen Daten²⁹⁵. Die mathematischen Minimierungs-/Maximierungsoperationen würden andernfalls versagen und virtuelle In- und Outputs bestimmen, die gegebenenfalls negativ sind. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass es sich bei allen betrachteten In- und Outputs um Güter handelt²⁹⁶, denn die (positiven) Koeffizienten geben an, wie bedeutsam der jeweilige In- oder Output für die die Effizienzeinstufung der DMU ist²⁹⁷. Ein Vergleich auf Grund dieser Bedeutung kann bei jedem Input-/Outputwert nur DMU-übergreifend angestellt werden, da nur so gesichert ist, dass die gleichen Einheiten verwendet werden.

Für das CCR-, BCC-, Add-, RAM- und FDH-Modell reichen nicht-negative In- und Outputs aus, wenn mindestens je ein In- und ein Outputwert pro DMU größer Null ist²⁹⁸. Andernfalls kann kein endliches Verbesserungspotential (= θ -Wert) berechnet und somit auch keine radiale Effizienz bestimmt werden²⁹⁹. Die Beschränkung auf mindestens einen In- und Output größer Null ist auch deshalb sinnvoll, weil so gewährleistet wird, dass es nicht möglich ist, Inputs ohne Outputs zu „verbrauchen“ sowie ohne Inputs Outputs zu erzeugen. Letzteres gehört zu den grundlegenden Anforderungen an eine Technologie³⁰⁰, Ersteres macht bei der Annahme von Gütern ökonomisch keinen Sinn.

Die beiden multiplikativen Modelle erfordern Daten größer/gleich 1, da der Logarithmus Werte kleiner 1 in negative Zahlen überführt. Zudem muss mindestens ein Input- und ein Outputfaktor größer 1 sein, da der Logarithmus eine 1 auf 0 abbildet und somit keine Effizienzbeurteilung möglich wäre³⁰¹. Für das InvMult-Modell reichen strikt positive Daten³⁰², wie bereits im Zusammenhang mit der freien Verschwendbarkeits-Annahme bei Abbildung 8 verdeutlicht wurde.

Beim Vorliegen von negativen Daten gibt es generell die Möglichkeit, durch die Multiplikation mit -1 oder einer anderen negativen Zahl die Daten in den positiven Zahlenraum zu überfüh-

295) Auf die einzelnen Modelle wird in diesem Kapitel noch eingegangen.

296) Vgl. Kapitel 2.2.2.

297) Vgl. ALLEN/ATHANASSOPOULOS/DYSON ET AL. (1997) S. 14.

298) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 42 und S. 102-105, BANKER/CHANG/COOPER (1996) S. 240.

299) Vgl. PASTOR (1996) S. 97 f.

300) Vgl. FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985) S. 46.

301) Siehe Anhang 3. Dies ist insbesondere auch durch das Verbot der Division durch Null begründet, welche sich im Ausgangsmodell der multiplikativen Modelle ergeben würde. CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. S. 223 beschränken sich zwar auf ausnahmslos strikt positive Daten, dies kann jedoch unter den oben genannten Bedingungen vernachlässigt werden.

302) Vgl. LOVELL/PASTOR (1995) S. 122.

ren. Dies verändert jedoch auch die Orientierung der Daten, d.h. wenn es sich vor der Rechenoperation um einen erwünschten Faktor gehandelt hat, bedeutet nun ein höherer Wert nicht die Zu-, sondern die Abnahme dieses Faktors. Somit ist diese Rechenoperation nicht geeignet, um mit negativen Daten umzugehen. Auf den Fall des unerwünschten Faktors wird noch in Kapitel 3.3.7 eingegangen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Input/Outputfaktor, der negative Daten enthält, bei allen DMUs um eine Konstante zu erhöhen, so dass keine negativen Daten bei allen DMUs mehr vorliegen. Dabei werden die Abstände untereinander beibehalten. Dies macht jedoch nur Sinn, wenn die Konstante frei wählbar³⁰³⁾ ist, um so nicht die Resultate manipulieren zu können³⁰⁴⁾. Diese Eigenschaft wird als „Translationsinvarianz“ bezeichnet³⁰⁵⁾.

Das CCR-Modell besitzt diese Eigenschaft nicht, da dadurch bspw. im 1-Input/1-Output-Fall die Best-Practice-Gerade eine andere Steigung bekommen würde und somit die Abstände zu den anderen DMUs um einen nicht konstanten Faktor variieren würden. Dieses Beispiel kann auf alle CRS-Annahmen übertragen werden³⁰⁶⁾. Bei VRS sieht dies jedoch anders aus. ALI/SEIFORD beweisen, dass die Konvexitätsbedingung eine Voraussetzung für das Vorliegen von Translationsinvarianz ist, da nur bei einer Addition der Konstanten durch Konvexitätsbedingung gewährleistet ist, dass genau der Wert dieser Konstanten in den Nebenbedingungen addiert wird³⁰⁷⁾. Da dem VarMult-Modell diese Bedingung fehlt, ist dies nicht translationsinvariant. Beim Add-Modell dagegen kann diese Eigenschaft durch Einsetzen nachvollzogen werden (siehe dazu Anhang 4)³⁰⁸⁾. Da beim RAM nur zusätzlich die Slacks durch die Spannweiten dividiert werden und Letztere sich durch die Addition einer Konstante ebenfalls nicht ändern, ist auch RAM translationsinvariant³⁰⁹⁾. Für das BCC-Modell gilt dies nur eingeschränkt. Beim inputorientierten BCC-Modell sind die Outputs translationsinvariant, beim outputorientierten Modell die Inputs³¹⁰⁾, wobei dies nicht für die Koeffizienten der Multiplier Form gilt³¹¹⁾. Dies kann ebenfalls durch Einsetzen gezeigt werden³¹²⁾. Falls zusätzlich auch die eigentlich nicht translationsinvarianten Daten beim entsprechend orientierten BCC-Modell durch eine Konstante verändert werden sollen, so bleibt zwar die Einstufung in effizient

303) Jedoch muss gewährleistet sein, dass dadurch die eben beschriebenen Wertebereiche nicht verletzt werden.

304) Vgl. SCHEEL (2000) S. 83.

305) „translation invariance“ - vgl. LOVELL/PASTOR (1995) S. 147.

306) Vgl. SCHEEL (2000) S. 83 f.

307) Vgl. ALI/SEIFORD (1990) S. 404f. Da die virtuellen Vergleichs-DMUs durch mehrere Referenz-DMUs gebildet werden, muss die Addition der Konstanten auch bei der Vergleichs-DMU entsprechend groß sein. Dies kann nur erfolgen, wenn die Summe der Referenz-DMU-Gewichtungen (λ_k) gleich 1 ist.

308) Ersetzung von x_i durch $x_i + w_i$ oder y_j durch $y_j + z_j$ für alle p DMUs. Vgl. ALI/SEIFORD (1990) S. 404, siehe Anhang 4.

309) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 18.

310) Vgl. PASTOR (1996) S. 96.

311) Vgl. THRALL (1996) S. 105.

312) Durch $\theta_0 * x_{i,0}$ bei $\theta_0 < 1$ werden die gegebenenfalls um $w_i > 0$ verschobenen Inputs ($x_i' + w_i$) nur um $\theta_0 * w_i < w_i$ abgeändert.

und nicht-effizient bestehen (d.h. die Hülle bleibt unverändert), aber die Abstände zu den ineffizienten DMUs verändern sich³¹³). Zu beachten ist, dass sich beim BCC-Modell durch Addition einer Konstanten die Zuordnung von Skalenertragsannahmen ändern kann³¹⁴). Das InvMult ist translationsinvariant, wenn die Konstante auf die logarithmisierten Daten angewendet wird. Dies folgt auf Grund der Modellübereinstimmungen zu dem Add-Modell³¹⁵). Doch das hat nur im Zusammenhang mit der daraus resultierenden Einheitenunabhängigkeit Bedeutung³¹⁶), da auf die Ausgangsdaten der Logarithmus angewendet wird und erst dann die Konstante addiert werden kann. Da $\log(x_i + \text{const}) \neq \log x_i + \text{const}$ ($\neq \log x_i + \log \text{const}$) gilt, ist die freie Wählbarkeit der Konstanten im Sinne der Translationsinvarianz nicht gegeben. Das FDH-Modell ist ebenfalls nicht translationsinvariant³¹⁷), da sich die radiale Effizienz zur FDH-Hülle hin durch die Addition einer positiven Konstanten ändert³¹⁸).

Bei den translationsinvarianten Modellen ist es somit möglich, auch negative Daten zuzulassen, wenn vor den Berechnungen eine entsprechend große Konstante addiert wird³¹⁹). Dies hat zudem den Vorteil, dass mit Input-/Outputfaktoren umgegangen werden kann, die positive wie negative Daten enthalten. Somit können das RAM- und Add-Modell alle Daten unabhängig vom Vorzeichen berücksichtigen.

3.3.4 Indexzahlen

Problematisch sind Beschränkungen der Wertebereiche der Input-/Outputfaktoren. Wenn z.B. eine Indexzahl wie die Arbeitslosenquote als Inputfaktor benutzt werden soll, besteht das Problem, dass dieser Wert eine Obergrenze von 100% aufweist. Durch solche Obergrenzen sind die Skalenertragsannahmen CRS und NDRS nicht möglich, da diese Annahmen die Technologie durch die *beliebige* Vervielfältigung eines gemessenen Input-/Outputtransformation erweitern³²⁰). Ebenso ist die freien Verschwendbarkeits-Annahme bei solchen Indexzahlen als Output nicht gegeben.

Aber auch allein die Mischung von indexbasierenden Faktoren mit volumenbasierenden Maßen stellt ein Problem dar, wie an folgendem Beispiel gezeigt wird. In Tabelle 3 stehen die Werte für zwei DMUs (1-Input/3-Output-Fall)³²¹):

313) Vgl. ALI/SEIFORD (1990) S. 405. Dies ist wiederum durch Einsetzen beweisbar.

314) Vgl. THRALL (1996) S. 107 f. Siehe Kapitel 2.2.4.1.

315) Vgl. ALI/SEIFORD (1990) S. 405, PASTOR (1996) S. 100. Die Unterschiede zum Add-Modell liegen „nur“ in der Logarithmisierung der Ausgangsdaten.

316) Siehe Anhang 4, siehe Kapitel 3.3.2.

317) Vgl. PASTOR (1996) S. 100.

318) Siehe Abbildung 8 (c). Beim inputorientierten Modell bspw. wird durch die Addition zum x-Wert zwar die Strecke zum effizienten Rand hin (waagerechter Pfeil) erhalten, aber da als Effizienzwert das Verhältnis zum x-Wert der effiziente DMU berechnet wird, ändert sich dieses.

319) Vgl. PASTOR (1996) S. 93. Dabei muss bei allen DMUs die gleiche Konstante zu dem jeweiligen Inputwert addiert werden.

320) Vgl. SCHEEL (2000) S. 43. Hier muss der Multiplikator > 1 sein.

321) Das Beispiel wurde in Anlehnung an DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 250 konzipiert.

	<i>Input</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
DMU 1	10	12	15	0,9
DMU 2	20	24	30	0,9

Tabelle 3: 1-Input/3-Output-Fall für 2 DMUs mit Indexfaktor

DMU 2 „produziert“ somit von den beiden Outputfaktoren 1 und 2 jeweils doppelt soviel wie DMU 1, aber auch mit dem doppelten Input. Ohne den Output 3 sind somit DMU 1 und DMU 2 vom Effizienzwert her gleich anzusehen. Wenn der 3. Output nun z.B. die Quote der rechtzeitig fertiggestellten Aufträge repräsentiert, wäre es angebracht, dass beide DMUs den gleichen Effizienzwert zugewiesen bekommen. Dies ist jedoch auf Grund der „optimalen“ Koeffizienten nicht der Fall³²²⁾. Als genereller Ausweg für solche Konstellationen können - falls möglich - entweder die Indexzahlen durch absolute Werte ersetzt oder bei Prozent- oder Verhältniszahlen die zu Grunde liegenden Werte als zusätzliche In- oder Outputs aufgenommen werden³²³⁾.

3.3.5 Qualität³²⁴⁾

Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung der DEA ist, dass die beobachteten Daten der DMUs störungsfrei sind³²⁵⁾. Das bedeutet, dass es sich bei den gemessenen Werten um die tatsächlichen In- und Outputs handeln muss³²⁶⁾ und keinerlei Datenrauschen³²⁷⁾ vorliegt. Dies ist wegen der relativen Effizienz so wesentlich, da sich eine gestörte, den effizienten Rand (mit-)bestimmende DMU auf die Effizienzberechnung von sehr vielen DMUs auswirken kann. Wenn eine ineffiziente DMU durch gestörte Daten gekennzeichnet ist, betrifft dies nur die DMU selbst, so lange die Störung nicht dazu geführt hat, dass die DMU vom effizienten Rand der Technologie verdrängt wurde oder sie deshalb auf diesem liegt³²⁸⁾. Andernfalls kann sie als Referenz-DMU sehr viele ineffiziente DMUs beeinflussen. Nach SCHMIDT ist die DEA sogar generell nicht anwendbar, da er die Annahme der störungsfreien Daten als empirisch widerlegt ansieht³²⁹⁾.

Robustheitsprüfung

Auch wenn aus der DEA selbst keine Berücksichtigung von Störungen oder deren Berech-

322) Um diesen Effekt zu beobachten, ist das Beispiel um zusätzliche DMUs zu erweitern. Allerdings ist durch Normierung des Inputs auf 1 zu sehen (bei Annahme konstanter Skalenerträge), dass der Output 3 bei der DMU 2 halb so groß wie bei der DMU 1 ausfällt. Somit ist die DMU 2 im Verhältnis zur DMU 1 nicht Pareto-Koopmans-effizient, die DMU 1 dagegen schon.

323) Vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 250.

324) „Qualität“ dient hier als Schlagwort, daher wird auf eine genaue Definition verzichtet.

325) Vgl. THOMPSON/DHARMAPALA/THRALL (1994) S. 393 f., PARK/SIMAR/WEINER (2000) S. 857, OLESEN (1995) S. 8.

326) Vgl. SCHEFCZYK (1994) S. 156.

327) „random noise in data“ (verrauschte Daten), „random disturbance in data“ (gestörte Daten). Die Begriffe „gestörte“ und „verrauschte Daten“ werden hier synonym benutzt und bedeuteten, dass die vorliegenden Daten durch irgendwie geartete Störungen (z.B. Messfehler) nicht den tatsächlichen Daten entsprechen müssen. Vgl. OLESEN/PETERSEN (1995) S. 442 f.

328) Vgl. bspw. BERGER/HUMPHREY (1997) S. 178, STEINMANN/ZWEIFEL (2001) S. 151.

329) Vgl. SCHMIDT (1985) S. 308 und 296 ff.

nung hervorgeht³³⁰), so ist es zumindest möglich, die Robustheit der Effizienzeinstufungen zu überprüfen. Dies kann geschehen, indem auf Datenänderungen besonders sensible DEA-Bereiche ermittelt werden, wie es z.B. THOMPSON/DHARMAPALA/THRALL für das CCR-Modell vorschlagen³³¹). Nach dieser Methode werden bspw. alle Input-Daten der effizienten DMUs simultan um einen Prozentsatz erhöht, während die Input-Daten der ineffizienten DMUs um den gleichen Prozentsatz verringert werden. Dieser Vorgang wird so lange iterativ durchgeführt, bis mindestens eine effiziente DMU diesen Status verliert oder eine ineffiziente DMU „effizient“ wird. Durch solche oder ähnliche Verfahren kann zumindest im Nachhinein berechnet werden, wie groß eine Störung in den Daten für die sensitivsten DMUs sein muss, um ihren (In-)Effizienz-Status zu ändern.

Identifizierung von Datenausreißern

Besser ist es jedoch, schon nach der Datenerhebung potentielle Datenausreißer zu entdecken³³²). Eine Möglichkeit zur Identifizierung von Datenausreißern sind Box-Plots³³³) verbunden mit dem Expertenwissen des Anwendungsfalles³³⁴). Neben dem Problem der Subjektivität bei der Identifizierung von Datenausreißern³³⁵) werden auf diese Weise jedoch keine DMUs identifiziert, deren Gestörtheit in der außergewöhnlichen Kombination von Input- und/oder Outputwerten liegt und die somit zu höheren Effizienzwerten neigen³³⁶).

Falls keine Korrektur vorgenommen werden kann, ist zu überprüfen, welchen Einfluss potentielle Ausreißer auf das Ergebnis haben und ob sie überhaupt einfließen sollen. Dies ist jedoch wieder eine subjektive Entscheidung, die die Ergebnisse der Effizienzanalyse erheblich beeinträchtigen kann.

Aufspaltung bei Qualitätsunterschieden

Unter einem etwas anderen Aspekt können ebenfalls Probleme mit „Qualität“ entstehen: Die Input-/Outputfaktoren werden nur rein mengenmäßig erfasst, eventuell vorhandene Qualitätsunterschiede können so nicht berücksichtigt werden. Hierin zeigt sich auch eine Schwäche des Pareto-Koopmans-Effizienzbegriffs: Jeder Faktor wird demnach gleichwertig behandelt³³⁷). THANASSOULIS/BOUSSOFIANE/DYSON splitten daher einen Outputfaktor in verschiedene Outputs auf, die jeweils die Mengen der unterschiedlichen Qualitätsstufen wiedergeben³³⁸). Eine stärkere Gewichtung der höheren Qualität kann mit Restriktionen der Koeffizienten er-

330) Es existieren jedoch bereits Ansätze, die DEA mit statistischen Verfahren zu kombinieren, z.B. bei FRIED/LOVELL/SCHMIDT ET AL. (2002). Die Entwicklung ist aber nach Ansicht von CHARNES/SEIFORD/THONE noch nicht so weit fortgeschritten, dass konkrete Problemlösungen bereitstehen, vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 276.

331) Vgl. THOMPSON/DHARMAPALA/THRALL (1994) S. 401ff.

332) Vgl. HUGHES/YAISAWARNG (2004) S. 415.

333) Vgl. HUGHES/YAISAWARNG (2004) S. 415. Für eine Beschreibung siehe ASSENMACHER (1998) S. 88 f.

334) Vgl. ALLEN (2002) S. 204.

335) Stichwort: Was ist ein Experte?

336) Vgl. THANASSOULIS/DYSON/FOSTER (1987) S. 407. Dies ist dadurch begründet, dass es keine DMU gibt, die mit dieser oder einer ähnlichen Kombination von den Faktoren als Vergleichsmaßstab erhalten kann. Vgl. auch CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000B) S. 14.

337) Vgl. NUNAMAKER (1985) S. 56.

338) Vgl. THANASSOULIS/BOUSSOFIANE/DYSON (1995) S. 592.

reicht werden, auf die in Kapitel 3.5 eingegangen wird.

3.3.6 Abhängigkeiten

Eine wichtige Voraussetzung für die freie Verschwendbarkeit ist, dass die Messung eines Outputfaktors nicht direkt von einem Inputfaktor abhängt. Wenn z.B. als Output der Gewinn als Größe herangezogen wird, dann hängt dieser unmittelbar von mit Kosten verbundenen Inputs ab. Eine Verschwendung solcher Inputs führt somit zwangsweise zur Reduzierung des Gewinns, also dem Output. Somit liegt keine - weder freie noch schwache - Verschwendbarkeit vor³³⁹⁾.

Abhängigkeitsauflösung

Dieses Problem kann umgangen werden, wenn bspw. der Output als Verkaufserlös definiert wird. Zusätzlich kann noch ein Inputfaktor eingeführt werden, der die Kosten repräsentiert, falls dieses nicht in dem Modell berücksichtigt wurde und der Gewinn nach wie vor dargestellt werden soll. Problematisch dabei ist die Einführung eines *neuen* Inputfaktors.

Bei mehr als einem Input oder einem Output kommt noch eine weitere Problematik hinzu, die durch die Konvexitäts-Annahme (auch bei den multiplikativen Modellen in logarithmischer Form) auftritt: die Substituierbarkeit dieser Faktoren³⁴⁰⁾. Bei Abbildung 2 in Kapitel 2.2 wurde dies schon einmal erwähnt. Wenn Abbildung 4 betrachtet wird, so ist ersichtlich, dass durch die Bildung von virtuellen DMUs, die dadurch den Rand der Technologie definieren, davon ausgegangen wird, dass bei den Inputfaktoren (bei den Outputfaktoren trifft dies entsprechend zu) Substituierbarkeit vorliegt. Es muss nur dann keine Substituierbarkeit vorliegen, wenn die konvexe Hülle durch nur eine einzige DMU definiert ist, da dann die freien Verschwendbarkeits-Annahme den restlichen Technologierand bestimmt. Dieser Fall ist jedoch im multiplen Input/Output-Fall sehr unwahrscheinlich und kann daher vernachlässigt werden³⁴¹⁾. Somit ist auch bei der Konvexitätsannahme zu prüfen, ob die Substituierbarkeit vorliegt oder zumindest nicht ausgeschlossen werden kann. Andernfalls können virtuelle Vergleichs-DMUs gebildet werden, die auf Grund evtl. vorhandener Komplementarität³⁴²⁾ nicht existieren dürften. Nur die FDH-Hülle erfordert keine Prüfung auf Substitution, da alle Ränder auf beobachteten DMUs unter Annahme von der freien Verschwendbarkeit basieren und somit nur durch die Daten selbst evtl. vorhandene Substituierbarkeit definiert ist.

339) Vgl. SCHEEL (2000) S. 46.

340) Vgl. SCHEEL (2000) S. 47.

341) Es liegen keine Informationen über einen solchen Fall aus der praktischen Anwendung der DEA vor.

342) Komplementarität ist das Gegenteil von Substituierbarkeit. Vgl. FEHL/OBERENDER (2002) S. 164.

3.3.7 Unerwünschte Faktoren

Bisweilen wurden die Input-/Outputfaktoren ausnahmslos als Güter³⁴³⁾ angesehen. Wenn aber nun unerwünschte Faktoren vorliegen, so spricht man in der Produktionstheorie von einem Übel. Übel sind dadurch gekennzeichnet, dass man sie nicht haben oder aus seinem Verantwortungsbereich entfernen möchte³⁴⁴⁾. Auf die DEA übertragen wird von unerwünschten Faktoren gesprochen, mit denen die vorgestellten Modelle so nicht umgehen können. Es gibt jedoch mehrere Ansätze, dies Problem zu beheben.

Unerwünschte Faktorentransformation

Es können grundsätzlich fünf Ansätze unterschieden werden, um vorliegende unerwünschte Faktoren zu berücksichtigen. Zum einen die Multiplikation mit einer negativen Zahl (MULT), um so die Orientierung umzukehren. Darauf basiert der zweite Ansatz, der die Translationsinvarianz ausnutzt, um die negativen Zahlen in einen positiven Zahlenraum zu überführen (TRANS). Ein weiterer Ansatz besteht darin, unerwünschte Inputs als Outputs und unerwünschte Outputs als Inputs anzusehen (INOOUT), den Kehrwert des unerwünschten Faktors zu benutzen (INV) oder die Technologie dahingehend abzuändern, dass nur schwache Verschwendbarkeit angenommen wird, um so nur Input- oder Outputvariationen zuzulassen, bei denen sich die Verhältnisse untereinander nicht ändern (WD)³⁴⁵⁾.

SCHEEL und andere stellen dazu fest, dass die effizienten DMUs von MULT, TRANS und INOOUT übereinstimmen und jeweils die effizienten DMUs von WD oder INV beinhalten, aber die Effizienzwerte (im Generellen) sich bei keinem der Ansätze gleichen³⁴⁶⁾.

Da allgemein gültige Empfehlungen in diesem Bereich (noch) nicht gegeben werden können³⁴⁷⁾ und modellabhängig noch zum Teil widersprüchliche Ergebnisse berechnet werden³⁴⁸⁾, werden hier Transformationen von unerw. Faktoren nur dann als begründet angesehen und zugelassen, wenn der daraus resultierende erwünschte Faktor eine logische Interpretation zulässt wie bspw. die Transformation des unerwünschten Faktors „Sterblichkeitsrate“ zur „Überlebensrate“³⁴⁹⁾. Somit hat dies keinen Einfluss auf die Modellauswahl.

3.4 Anzahl der Faktoren und der DMUs

Bedeutend für die Aussagefähigkeit der DEA ist auch die Menge der DMUs im Verhältnis zu der Anzahl von Input-/Outputfaktoren. Bei festgelegter Anzahl von DMUs führt die Annahme von VRS (im Gegensatz zu CRS) oder die Erhöhung der Anzahl verschiedener Input-/Out-

343) Genaugenommen als erwünschte Faktoren, so dass weniger Input bei mehr Output erstrebenswert ist.

344) Vgl. DYCKHOFF (2003) S. 123 - siehe auch Kapitel 3.2.2.

345) Vgl. SCHEEL (2001) S. 401 f., ALLEN (1998) S. 341.

346) Vgl. SCHEEL (2001) S. 403 f., DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 251 f., ALLEN (2002) S. 119.

347) Vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 252.

348) Vgl. SCHEEL (2001) 404 ff.

349) Vgl. THANASSOULIS/BOUSSOFIANE/DYSON (1995) S. 592. Formal entspricht dies der Multiplikation mit -1 und dann der Addition einer Konstanten (=100) und somit dem TRANS-Ansatz. Zu Problemen mit Indexzahlen siehe Kapitel 3.3.4.

putfaktoren zu höheren Effizienzwerten bei den DMUs. Ebenso führt eine Verringerung der Anzahl der DMUs zu höheren Effizienzwerten, was die Fähigkeit der Effizienzuntersuchung im Hinblick auf die Erkenntnis über Ineffizienzen (im Folgenden mit *Unterscheidungsfähigkeit* bezeichnet) mindert³⁵⁰) und dazu führen kann, dass potentielle Ineffizienzen nicht oder nicht ihrer eigentlichen Größe entsprechend entdeckt werden³⁵¹). Dies ist dem Umstand zuzurechnen, dass gilt: Je mehr Faktoren (im Verhältnis zu der Anzahl der DMUs) die Technologie aufspannen, um so mehr DMUs bilden (gewöhnlich) den effizienten Rand der Technologie³⁵²). Entsprechendes kommt bei Annahme der FDH-Technologie verstärkt zum Tragen, da hier gewöhnlich noch mehr DMUs die effiziente Hülle bilden (siehe dazu Anhang 5)³⁵³). Dieser Sachverhalt wird als Dimensionalitätsproblem bezeichnet³⁵⁴).

Dem steht jedoch die Forderung nach möglichst umfassender Berücksichtigung aller effizienzbeeinflussenden Ressourcen und Umweltfaktoren entgegen³⁵⁵). Um trotzdem möglichst wenige Faktoren aufzustellen, wurde der Ansatz erforscht, Inputs oder Outputs auszuschließen, die sich durch sehr hohe Korrelation³⁵⁶) zu anderen Faktoren auszeichnen. Neben dem Problem der Definition der „sehr hohen“ Korrelation konnten JENKINS/ANDERSON bei Anwendung auf verschiedene Datensätze keine Zusammenhänge feststellen, die dieses Vorgehen als begründet erscheinen lassen. Dies ist dem Umstand zu verdanken, dass durch das Weglassen eines Faktors keinerlei Aussage darüber getroffen werden kann, inwieweit sich die zu berechnenden Effizienzwerte im Gegensatz zur Ausgangssituation verändern, auch wenn der Informationsverlust als sehr gering (unter 1%) einzustufen ist³⁵⁷). Als Umkehrschluss wird so deutlich, dass die Auswahl der Faktoren einen erheblichen Einfluss auf die Ergebnisse haben kann und somit wieder eine Möglichkeit der subjektiven Beeinflussung gegeben ist³⁵⁸).

Faustformel zur Anzahl der DMUs

Als Richtwert fordern COOPER/SEIFORD/TONE in einer Faustformel, dass die Anzahl der DMUs p die Summe aus Anzahl der Inputs m und Outputs n mehrere Male übersteigt, wobei sie

350) Vgl. HUGHES/YAISAWARNG (2004) S. 410 ff., ZHANG/BARTELS (1998) S. 194. Die Unterscheidungsfähigkeit wird auch als „level of discrimination“ (Grad der Abstufung/Unterscheidung) oder „discriminating power“ (Fähigkeit zur Abstufung/Unterscheidung) bezeichnet - vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 248, BOUSSOFIANE/DYSON/THANASSOULIS (1991) S. 4.

351) Vgl. HUGHES/YAISAWARNG (2004) S. 413.

352) Vgl. JENKINS/ANDERSON (2003) S. 51 f. Das „gewöhnlich“ bezieht sich auf die in der Praxis beobachteten Daten. Es sind jedoch Extremfälle denkbar, in denen zusätzliche Faktoren keinen Einfluss haben, z.B. wenn alle DMUs in diesem Faktor einen 0-Wert aufweisen.

353) Vgl. STAAT (2001) S. 130.

354) Vgl. HUGHES/YAISAWARNG (2004) S. 410.

355) Siehe Kapitel 3.1.

356) Die Korrelation gibt die Abhängigkeit von Faktoren an. Vgl. HARTUNG (1999) S. 72.

357) Vgl. JENKINS/ANDERSON (2003) S. 59. Hierbei sei angemerkt, dass bereits ein deutlich aufwendigeres statistisches Verfahren als die reine Korrelationsberechnung zum Einsatz kam, da Letztere sich schon bei früheren Untersuchungen als ungeeignet erwies - vgl. bspw. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 248f., NUNAMAKER (1985) S. 56.

358) NUNAMAKER (1985) S. 57 schlägt daher vor, mit verschiedenen Kombinationen der Input- und Outputfaktoren die Robustheit der Effizienzeinstufung zu überprüfen.

sich später auf mindestens das Dreifache festlegen³⁵⁹). DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. fordern dagegen, dass $p \geq 2 * m * n$ erfüllt ist³⁶⁰). Für das FDH-Modell stellen PARK/SIMAR/WEINER in einer Simulation sogar einen exponentiellen Zusammenhang mit $m+n$ her³⁶¹).

Auch wenn hier abschließend keine harte Regel für alle Anwendungsfälle aufgestellt werden kann, so ist doch zumindest ein Ansatzpunkt gegeben, der bei zu hohen Effizienzwerten oder zu vielen effizienten DMUs (und somit geringer Aussagefähigkeit der Effizienzanalyse) einen Hinweis auf die Ursache geben kann.

3.5 A-priori-Wissen

Obwohl die DEA einen nicht-parametrischen Ansatz verfolgt, ist es denkbar, dass bereits Wissen existiert, welches im Widerspruch zu den berechneten Effizienzwerten steht.

Es ist möglich, dass die optimalen Koeffizienten/Gewichte v_i^* und u_j^* der Multiplier Form zumindest teilweise im Gegensatz zu bereits bekanntem Wissen stehen. Oder die berechneten Koeffizienten lassen durch sehr große Unterschiede den Realitätsgehalt der Effizienzbeurteilung zweifelhaft erscheinen³⁶²). Dieser Fall tritt ein, wenn zum Beispiel der Preis für zwei Inputfaktoren bekannt ist und deren Preisverhältnis durch die Gewichtsverhältnisse einzelner DMUs untereinander nicht oder nicht annähernd³⁶³) wiedergegeben wird.

Koeffizientenrestriktionen

In diesen Situationen können zusätzliche Restriktionen für die Koeffizienten eingeführt werden. Zum einen kann vorgegeben werden, dass das Verhältnis zweier Koeffizienten nicht einen bestimmten Bereich verlässt³⁶⁴), oder zum anderen, dass die Koeffizienten selbst oder mögliche Intervalle für diese vorgegeben werden³⁶⁵). Allerdings sind diese Methoden wieder subjektiven Einflüssen ausgesetzt, so dass die Beschränkung auf Koeffizienten oder mögliche Koeffizientenbereiche sehr gut begründet sein sollte, um die Glaubwürdigkeit der Effizienzanalyse zu erhalten³⁶⁶). Ein ganzheitlicher Ansatz für dieses Problem ist nicht bekannt³⁶⁷).

In der Literatur sind solche Restriktionen nur für das CCR- und BCC-Modell zu finden³⁶⁸),

359) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 103 und S. 252. Diese Faustformel ist auch bei FRIEDMAN/SINUANY-STERN (1998) S. 783 zu finden.

360) Vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 248.

361) Vgl. PARK/SIMAR/WEINER (2000) S. 871. Es kann zwar nicht ausgeschlossen werden, dass dieser Fall nur bei der angenommenen Verteilung der Daten vorkommt, aber selbst dann wäre es ein denkbarer Extremfall.

362) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 151 f., ROLL/GOLANY (1993) S. 102.

363) Die Definition für „annähernd“ in diesem Zusammenhang ist wiederum eine subjektive Entscheidung, die nicht verallgemeinert werden kann.

364) Dieser Ansatz ist als „Assurance-Region-Method“ bekannt - vgl. COOPER/THOMPSON/THRALL (1996) S. 36.

365) Dieser Ansatz beinhaltet die Assurance Region Methode als Spezialfall und ist als „Cone-Ration Method“ bekannt - vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 159 ff.

366) Vgl. ALLEN/ATHANASSOPOULOS/DYSON ET AL. (1997) S. 14, ROLL/GOLANY (1993) S. 107.

367) Vgl. ALLEN/ATHANASSOPOULOS/DYSON ET AL. (1997) S. 32.

368) Vgl. bspw. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 175, BROCKETT/CHARNES/COOPER ET AL. (1997), ROLL/GOLANY (1993).

denkbar sind sie jedoch für alle hier vorgestellten Modelle³⁶⁹⁾.

Standard-DMUs

Zudem ist es denkbar, dass Teile des effizienten Randes/der effizienten Hülle bereits bekannt sind, aber diese sich nicht in der berechneten Hülle widerspiegeln, da in der vorgenommenen Effizienzanalyse keine solchen (effizienten) DMUs gemessen wurden³⁷⁰⁾.

Daher schlagen GOLANY/ROLL vor, die DMUs um sog. *Standard-DMUs* zu ergänzen, die die effiziente Hülle zumindest teilweise erweitern³⁷¹⁾. Dadurch ist es möglich, dass die effiziente Hülle durch die zusätzlichen Standard-DMUs und die gemessenen DMUs gebildet wird, wobei Letztere insbesondere für Bereiche wichtig sind, in denen kein Wissen über den Verlauf der effizienten Hülle vorliegt. Die Komplexität zur Bestimmung dieser Standard-DMUs nimmt jedoch stark mit der Anzahl der Input-/Outputfaktoren zu. Ebenfalls sind so subjektive Beeinflussungen möglich.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass Modellmodifikationen nicht vorgenommen werden müssen, da das Hinzufügen von DMUs keinerlei Auswirkung auf die Methoden hat³⁷²⁾. Zudem ist eine Kombination mit den Restriktionen für die Koeffizienten möglich, wobei diese durch die Einführung der Standard-DMUs sogar überflüssig werden können³⁷³⁾.

3.6 Nicht-kontrollierbare Faktoren

Die radialen, aber auch die slackbasierten Effizienzwerte gehen davon aus, dass alle Inputs und/oder Outputs (je nach Orientierung des Modells) „verbessert“ werden können, um so auf den effizienten Rand zu gelangen. Es kann jedoch - insbesondere bei umweltbedingten - Faktoren vorkommen, dass die DMU³⁷⁴⁾ keine Kontrolle darüber hat³⁷⁵⁾. Trotzdem würden die bisweilen vorgestellten Modelle gegebenenfalls festgestellte Ineffizienzen auf alle Input- und/oder Outputfaktoren beziehen. Dies ist problematisch, weil so davon ausgegangen wird, dass bspw. ineffiziente DMUs typische Umweltfaktoren wie die Bodenbeschaffenheit (als Input beim Vergleich zwischen landwirtschaftlichen Betrieben) verändern können, um so auf den effizienten Rand zu gelangen³⁷⁶⁾. Falls sich die nicht-kontrollierbaren Faktoren nur auf die In- oder Outputs beziehen, ist dies ein Indikator dafür, bei orientierten Modellen das jeweils gegenteilig-orientierte auszuwählen³⁷⁷⁾.

369) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 55. Allerdings konnte keine Literatur gefunden werden, in der die Anwendung oder anderweitige Untersuchung zu Restriktionen für die multiplikativen Modelle untersucht wurden.

370) Vgl. GOLANY/ROLL (1994) S. 314.

371) Vgl. GOLANY/ROLL (1994) S. 315 ff.

372) Es kann jedoch einen größeren Rechenaufwand mit sich bringen.

373) Vgl. GOLANY/ROLL (1994) S. 327.

374) Oder deren Entscheidungsträger - daher auch „**Decision Making Unit**“.

375) Vgl. BANKER/MOREY (1986) S. 86.

376) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 50.

377) Vgl. DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001) S. 252.

Aufsplittungsansatz

BANKER/MOREY³⁷⁸⁾ schlagen daher vor, die nicht-kontrollierbaren Faktoren aus der Zielfunktion herauszunehmen und die Nebenbedingungen aufzusplitten, so dass kontrollierbare Faktoren nach wie vor durch Ineffizienzen (beim CCR-Modell der θ -Wert) gekennzeichnet sind, die nicht-kontrollierbaren dagegen nicht. Bei additiven Modellen reicht dagegen das bloße Weglassen aus der Zielfunktion der nicht-kontrollierbaren Slacks³⁷⁹⁾. Eine Reihe von Modifikationen basiert auf diesem Ansatz, deren Betrachtung hier aber zu weit führen würde³⁸⁰⁾.

Klassifikationsansatz

Ein gänzlich modellunabhängiger Ansatz von RUGGIERO geht dahin, die nicht-kontrollierbaren Faktoren ähnlich wie ordinale Skalen bei dem Klassenvergleichsansatz aus Kapitel 3.3.1 zu behandeln³⁸¹⁾. Hierbei besteht jedoch wieder das Problem der genügend großen Anzahl von Vergleichs-DMUs.

4 Vorgehensmodell

4.1 Grundlagen zum Vorgehensmodell

Das Vorgehensmodell gliedert sich in drei Phasen. In der ersten Phase werden die allgemeinen formalen Voraussetzungen der DEA überprüft. Falls hier keine Widersprüche bestehen bleiben, werden in der zweiten Phase die modellspezifischen Voraussetzungen untersucht, um darauf basierend eine Modellauswahl zu treffen. In der dritten Phase werden weitere einschränkende Gesichtspunkte der DEA behandelt, die vorher nicht berücksichtigt wurden, da sie auf die Auswahl der DEA-Modelle keinen Einfluss haben und/oder deren Anwendung erst nach der DEA-Berechnung erfolgen kann. Falls in Phase 2 keine eindeutige Modellauswahl getroffen werden konnte, fließen in Phase 3 mögliche Anwenderpräferenzen mit ein.

In den folgenden Petri-Netz-Modellen (und im Text) sind Stellen durch fett gedruckte Schrift und Transitionen durch kursiv gedruckte Schrift bezeichnet. Da die Transitionen zum großen Teil nur extern bedingt schalten dürfen³⁸²⁾, steht gegebenenfalls die Bedingungsprüfung zwischen den entsprechenden Transitionen, die dann mit „ja“ oder „nein“ bezeichnet sind. Weitere Erklärungen folgen in den Erläuterungen zu den einzelnen Phasen.

4.2 Phase 1 - Grundsätzliche Eignung für die DEA

In Abbildung 9³⁸³⁾ auf Seite 53 ist die erste Phase des Vorgehensmodells abgebildet. Das Vorgehensmodell der Phase 1 ist so aufgebaut, dass alle grau unterlegten Stellen mit Marken die Zustände symbolisieren, die zur Nicht-Anwendung der DEA führen. Im Folgenden wird hierauf nicht einzeln eingegangen, da aus der Abbildung 9 ersichtlich ist, für welche

378) Vgl. BANKER/MOREY (1986) S. 515 ff.

379) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 51.

380) Einen Überblick bietet bspw. SYRJÄNEN (2004).

381) Vgl. RUGGIERO (2004) S. 252.

382) Dies ergibt sich aus der Beschriftung.

383) In Anhang 6 sind alle Modelle in einem größeren Format und zusammenhängend abgebildet.

Stellen dies zutrifft. Der Startpunkt der Phase 1 liegt oben links bei der Stelle **Anfang Phase 1, Teil A**.

Die darauf folgenden Stellen schalten abhängig davon, ob in dem vorliegenden Anwendungsfall für die DMUs alle Ressourcen berücksichtigt wurden³⁸⁴). Wegen des Problems der möglichst zu minimierenden Anzahl von Faktoren³⁸⁵) muss an dieser Stelle subjektiv³⁸⁶) entschieden werden, ob und inwieweit die benutzten Ressourcen durch die berücksichtigten Faktoren abgebildet werden. SCHEEL schlägt daher vor, die DMUs mit in die Auswahl- und Entscheidungsprozesse aufzunehmen, um so möglichst große Akzeptanz bei den DMUs der subjektiven Auswahl zu erreichen³⁸⁷). Falls fehlende Ressourcen nicht durch zusätzliche Faktoren modelliert werden können, so bleibt die Marke auf der Stelle **Ressourcen fehlen** stehen³⁸⁸).

Im nächsten Schritt wird überprüft, ob alle DMUs auf der gleichen Technologie operieren³⁸⁹). Hierfür ist es notwendige Bedingung, dass alle Ressourcen der DMUs berücksichtigt wurden. Deshalb folgt dieser Schritt erst im Anschluss. Entsprechend den Voraussetzungen aus Kapitel 3.1 muss gefragt werden: Operieren die DMUs mit ähnlichen Mitteln? Mehrere 0-Faktorenwerte bei verschiedenen DMUs deuten nicht darauf hin³⁹⁰). Die Interpretation von „ähnlich“ ist ebenfalls subjektiv zu treffen. Genau genommen müsste streng nach Definition auch von gleichen Mitteln die Rede sein³⁹¹). Werden nur identische Zeiträume verglichen? Sind alle Umweltbedingungen als Faktoren erfasst? Falls nur die letzte Frage negativ beantwortet wird, so kann - durch die Transition *durch Umweltfaktoren anpassen* symbolisiert - noch eine Korrektur vorgenommen werden³⁹²).

Wenn Qualitätsunterschiede berücksichtigt werden sollen (falls nicht, ist die entsprechende Transition „ja“ ebenso zu schalten) und dies nicht entsprechend Kapitel 3.3.5 getan wurde, so ist die dort beschriebene Aufspaltung jetzt vorzunehmen (Transition *Qualitätsfaktoren aufsplitten*), da andernfalls die dadurch erzeugten Faktoren nicht in die nachfolgenden Prüfungen einfließen. In Phase 3 ist gegebenenfalls das a-priori-Wissen über die Qualitätsunterschiede aufzugreifen. Die Stelle **Qualitätsunterschiede nicht berück.** ist dagegen kein

384) Siehe Kapitel 3.1.

385) Siehe Kapitel 3.4.

386) Vgl. SCHEEL (2000) S. 18.

387) Vgl. SCHEEL (2000) S. 17. Dies bezieht sich auf die Entscheidungsträger/Verantwortlichen der DMUs.

388) Dies gilt auch für die folgenden Betrachtungen analog und wird nicht zusätzlich erwähnt.

389) Siehe Kapitel 3.1.

390) Falls mehrere 0-Werte bei Faktoren vorliegen, so bedeutet dies, dass die jeweiligen DMUs diese Faktoren weder benötigen oder Zugriff darauf haben (bei Inputs) noch produzieren können oder wollen (bei Outputs). Ob dann noch eine gemeinsame zu Grunde liegende Technologie angenommen werden kann, ist zweifelhaft.

391) Siehe Kapitel 2.2. Die Aufweichung zu „ähnlich“ erfolgt jedoch im Bezug zur Praxis, da nur selten von wirklich gleichen Mitteln ausgegangen wird - z.B. durch qualitative Unterschiede von Faktoren.

392) Insbesondere der letzte Punkt, aber auch generell ist die Entscheidung über die gleiche Technologie durch subjektive Entscheidungsspielräume beeinflusst.

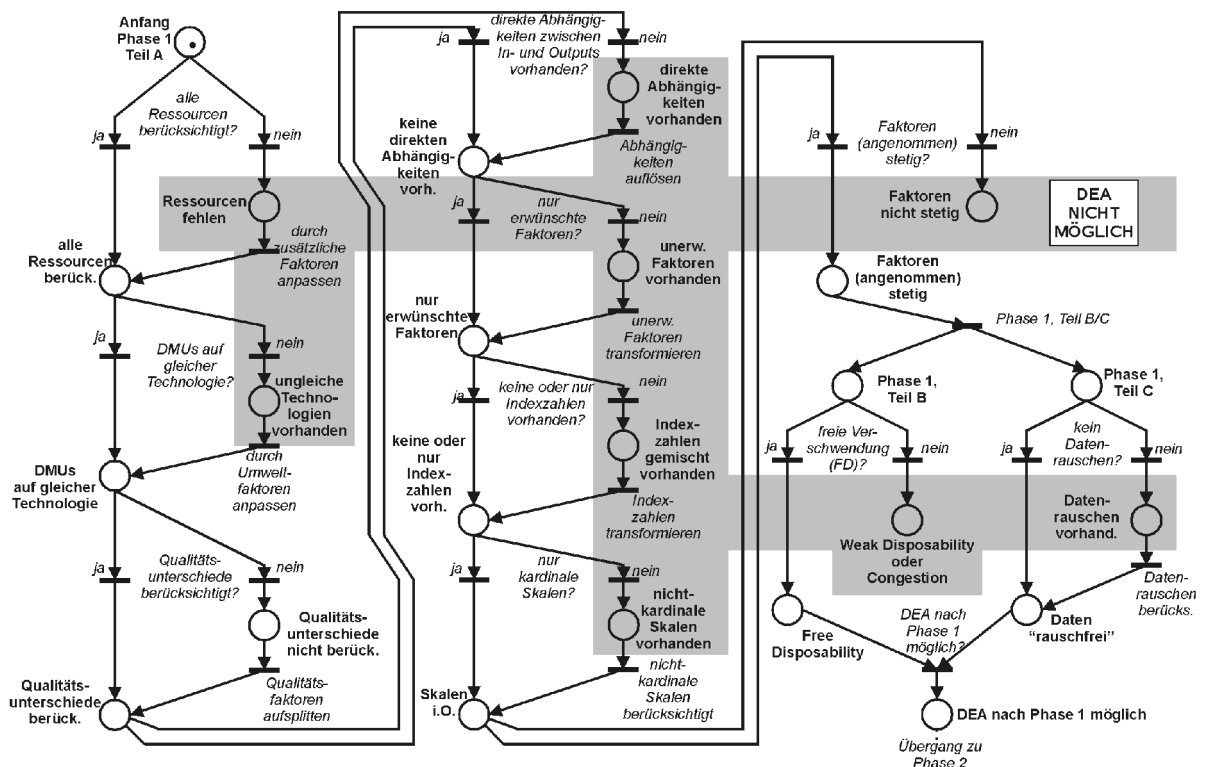


Abbildung 9: Phase 1 - Grundsätzliche Eignung für die DEA?

Eigene Erstellung

DEA-Ausschlusskriterium, da die DEA trotzdem angewendet werden kann³⁹³).

Nun folgt die Prüfung auf direkte Abhängigkeiten zwischen In- und Outputs, auf die in Kapitel 3.3.6 hingewiesen wurde. Unter normalen Umständen können diese durch den beschriebenen Ansatz der Abhängigkeitsauflösung beseitigt werden. Es geschieht an dieser Stelle und nicht erst bei der freien Verschwendbarkeits-Prüfung, damit die evtl. daraus entstehenden Faktoren ebenfalls noch auf ihre Eigenschaften überprüft werden können.

Die nächsten beiden Transitionen prüfen, ob unerwünschte Faktoren vorliegen. Ist dieses der Fall, so muss - falls möglich - die Transformation, wie am Ende von Kapitel 3.3.7 beschrieben wurde, durchgeführt werden.

Nun erfolgt eine Untersuchung, ob entweder nur oder gar keine Indexzahlen bei den Faktoren vorkommen³⁹⁴), und ob diese mit volumenbasierten Faktoren gemeinsam zur Anwendung gelangen. Falls gemischte Indexzahlen vorhanden sind, so sind diese entsprechend Kapitel 3.3.4 aufzulösen.

Erst jetzt stehen gegebenenfalls die letztendlichen Faktoren fest. Daher wird überprüft, ob die Skalen der Faktoren entsprechend Kapitel 3.3.1 nur kardinal vorliegen. Andernfalls muss - gegebenenfalls mit dem beschriebenen Unterscheidungsfähigkeitsverlust - bspw. der Klas-

393) Dies erfolgt dann allerdings ohne die Berücksichtigung der Qualitätsunterschiede. Es obliegt dem Anwender, hier eine Auswahl zu treffen.

394) Siehe Kapitel 3.3.4.

senvergleichsansatz oder der Programmvergleichsansatz zur Auflösung der nicht-kardinalen Skalen gewählt oder zumindest begründet werden, warum die Abweichung von Kardinalskalen eine zulässige Approximation darstellt. Dieser Punkt ist eng verknüpft mit der darauf folgenden Überprüfung auf Stetigkeit. Streng genommen erfordert die DEA die beliebige Teilbarkeit der Faktoren. Es müssen daher nicht nur die einzelnen Faktoren stetig sein oder zumindest deren Stetigkeit angenommen werden³⁹⁵), sondern auch die dadurch abgebildete Realität. Wenn z.B. Kosten als Inputfaktor benutzt werden³⁹⁶), diese aber diskrete Zusammenhänge repräsentieren³⁹⁷), muss von Unstetigkeit ausgegangen werden. Bei diesen Entscheidungen besteht generell subjektiver Entscheidungsspielraum. Ob dies zu falschen Ergebnissen führt, ist nach der Anwendung zu überprüfen (siehe Phase 3).

Zie folgende Transition *Phase 1, Teil B/C* dient zur Verdoppelung der Marke und um die mögliche nebenläufige Prüfung der Teile B und C darzustellen.

Phase 1, Teil B: Alle hier vorgestellten Modelle erfordern die Annahme der freien Verschwendbarkeit³⁹⁸). Falls diese - zumindest bei den betrachteten DMUs - nicht angenommen werden kann, ist die Anwendung der Modelle zu unterlassen. In Verbindung mit Abbildung 7 sind die möglichen Probleme mit dieser Annahme verdeutlicht worden, die bspw. bei Überfüllungseffekten zu zweifelhaften Ergebnissen führen können.

Phase 1, Teil C: Falls Datenrauschen vorhanden ist und dieses nicht herausgefiltert werden kann³⁹⁹), so ist die Anwendung der DEA zu unterlassen. Falls sie dennoch angewendet werden soll, obwohl gestörte Daten nicht auszuschließen sind⁴⁰⁰), ist eine Robustheitsprüfung der Ergebnisse durchzuführen, um zumindest abschätzen zu können, in welchem Umfang diese auf die Ergebnisse Einfluss haben könnten⁴⁰¹). Bei der Interpretation der Ergebnisse ist der mögliche Einfluss zu berücksichtigen.

Falls alle extern wie intern⁴⁰²) bedingten Transitionen geschaltet wurden und keine weiteren Schaltungen möglich sind, kann entweder an der Stelle „DEA nach Phase 1 möglich“ abgelesen werden, dass die Phase 1 positiv abgeschlossen wurde, oder den grau unterlegten Stellen mit Marke(n) entnommen werden, welche Voraussetzung nicht erfüllt wurde, die für die Anwendung der in dieser Arbeit behandelten DEA-Modelle notwendig ist.

395) Siehe Kapitel 2.2 und 3.3.1.

396) Siehe Kapitel 3.3.1.

397) Wenn z.B. die Kosten für den Fuhrpark eines Unternehmens als Inputfaktor benutzt werden, ist ersichtlich, dass eine Inputreduzierung auf Grund von Fixkosten pro Fahrzeug (Anschaffung/Ab-schreibung, Versicherung, Steuern...) nicht beliebig, sondern nur in Stufen vorgenommen werden kann.

398) Siehe dazu Tabelle 2, S. 37.

399) Beispiele dazu wurden in Kapitel 3.3.5 gegeben.

400) Datenrauschen kann praktisch nur selten vollständig ausgeschlossen werden, da dessen Ursachen sehr vielfältig sind (z.B. Meßfehler/-toleranzen,...). Vgl. Scheel (2000) S. 55.

401) Siehe Phase 3.

402) Intern bezieht sich darauf, dass eine Transition nur dann schalten kann, wenn in der(den) Stelle (n) vor ihr (jeweils) eine Marke liegt.

4.3 Phase 2 - DEA-Modellauswahl

In Abbildung 10 ist die Phase 2 modelliert. Die oberste Stelle ist die letzte (maximal mögliche) Stelle der Phase 1 (Abbildung 9). Hier geht es nun um die konkrete Modellauswahl auf Grund der Voraussetzungen der einzelnen Modelle. Die Stellen am unteren Rand repräsentieren die Modelle mit folgenden Bezeichnungen: CCR-I/CCR-O steht für das input- bzw. outputorientierte CCR-Modell. Dies gilt entsprechend für das BCC- und FDH-Modell. Die anderen Bezeichnungen entsprechen den bereits eingeführten Abkürzungen. In Abbildung 10 wurde von der Petri-Netz-Notation abgewichen, da die Einzeichnung aller Kanten das Modell

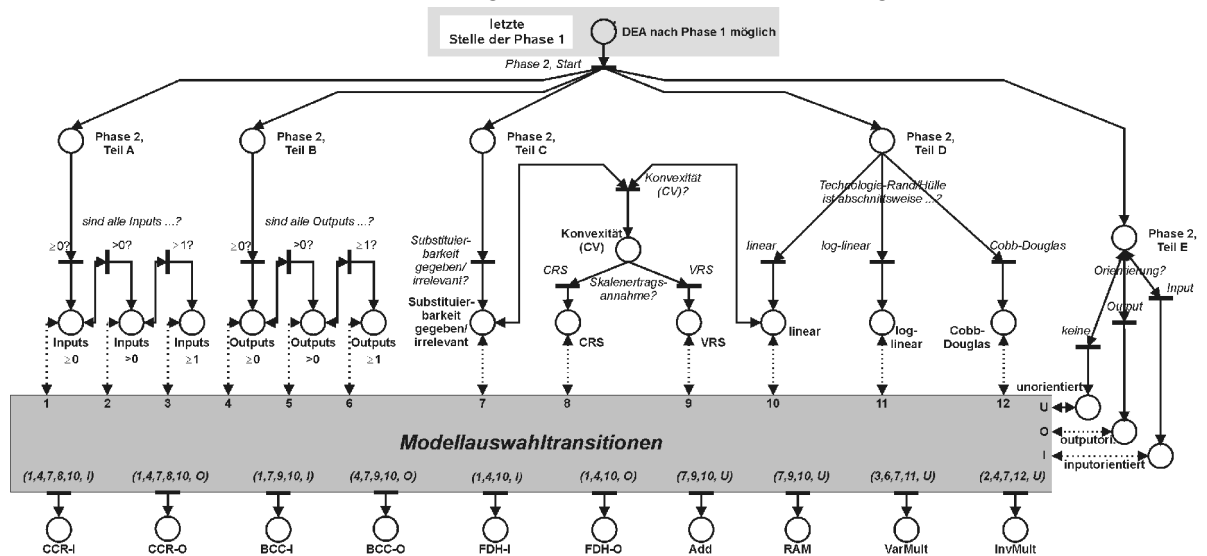


Abbildung 10: Phase 2 - DEA-Modellauswahl

Eigene Erstellung

sehr unleserlich gemacht hätte. Daher wurden die gepunkteten, beidseitig gerichteten Kanten eingeführt, die von den jeweiligen Stellen auf den grauen Kasten („Modellauswahltransitionen“) zeigen. In dem grauen Kasten stehen die Nummern 1-12 und Buchstaben U, I, O (unorientiert, input- oder outputorientiert) für die Kanten, die mit den unterhalb liegenden Transitionen verbunden werden, wenn dort die Zahl/der Buchstabe in dem eingeklammerten Wert vorkommt. So kann bspw. bei der (Modellauswahl-)Transition vor der FDH-I-Stelle abgelesen werden, dass diese mit den Stellen 1 (**Inputs** ≥ 0), 4 (**Outputs** ≥ 0), 10 ([Technologie-Rand/Hülle abschnittsweise] **linear**) und I (**inputorientiert**) verbunden ist und entsprechend der Petri-Netz-Definition nur dann schaltet, wenn die vorgenannten Stellen jeweils mit einer Marke belegt sind. Da die gepunkteten Pfeile jeweils in beide Richtungen zeigen, sind nach einer Schaltung die Marken in den entsprechenden Stellen oberhalb des grauen Kastens immer noch vorhanden, um so gegebenenfalls mehrere Modellauswahltransitionen schalten zu können.

So ist es theoretisch denkbar, dass diese Modellauswahltransitionen (bei Vorliegen der entsprechenden Bedingungen) beliebig oft schalten. Da in dem Vorgehensmodell zu keiner Zeit die Anzahl >1 von Marken in einer Stelle von Bedeutung ist, macht dies keinen Sinn. Daher darf in dem Vorgehensmodell generell jede Transition nur maximal einmal schalten.

Die Verbindungen der Modellauswahltransitionen zu den jeweiligen Stellen ergeben sich sowohl aus Kapitel 3 als auch aus den nachfolgenden Erläuterungen.

Die Stelle **DEA nach Phase 1 möglich** ist gleichzeitig der Startpunkt für die Phase 2. Mit der Transition *Phase 2, Start* (oben in der Mitte der Abbildung 10) wird gegebenenfalls die Marke der Phase 1 aufgenommen und auf die nebenläufig möglichen Überprüfungsstellen (Phase 2, Teil A-E) verteilt.

Phase 2, Teil A, B: Es wird überprüft, in welchen Zahlenräumen die Werte für die Inputs (Teil A) oder Outputs (Teil B) vorliegen. Wenn alle Inputs (Outputs entsprechend) größer/gleich 0 sind, schaltet die erste Transition. Die zweite schaltet, wenn zudem alle Inputs größer 0 sind. Da aber die gerichtete Kante von der Stelle **Inputs ≥ 0** in beide Richtungen zeigt, bedeutet dies, dass die Marke in der Stelle nach Schaltung der Transition >0 ? wieder vorzufinden ist.

Die Reihenfolge der Schaltungen ist so gewählt, dass möglichst wenige Überprüfungen stattfinden müssen (falls schon ≥ 0 nicht erfüllt ist, so wird >0 oder >1 auch nicht erfüllt sein). Somit kann letztendlich anhand der Marken abgelesen werden, in welchen Zahlenräumen sich die Inputs/Outputs bewegen.

Phase 2, Teil C: Die Überprüfung auf Vorliegen von Substituierbarkeit ist bewusst aufgenommen worden. Nicht nur die Konvexitäts-Annahme, sondern auch die Cobb-Douglas-Hülle oder die log-lineare Hülle machen diese Überprüfung erforderlich - wenn nicht der 1-Input/1-Output-Fall vorliegt, dann ist sie irrelevant. Kann nun für zwei Input- oder Outputfaktoren keine Substituierbarkeit angenommen werden, so schaltet die Transition nicht. Zu beachten ist, dass evtl. nicht-kardinale Skalen in Phase 1 akzeptiert wurden, da eine hinreichende Approximation angenommen werden konnte. Ähnliches gilt für nicht-stetige Faktoren. In beiden Fällen ist wegen der diskreten Werte keine beliebige Substituierbarkeit möglich. Allerdings kann dann aus den gleichen Gründen wie bei der Annahme in Phase 1 auch hier die Substituierbarkeit angenommen werden.

Phase 2, Teil D: Diese Phase ist eng verknüpft mit dem Vorliegen der Konvexitäts-Annahme und der Auswahl der Skalenertragsannahmen. Zuerst muss jedoch festgelegt werden, welche Hüllenform angenommen wird, da die anderen Überprüfungen gegebenenfalls überflüssig werden. Generell gibt es in der Literatur wenig Hilfe für die Überprüfung der Richtigkeit von Annahmen in Bezug auf die Technologie (T_u)⁴⁰³. Dabei besteht das Problem, dass die Annahmen über T_u streng genommen nicht testbar sind, da T_u eben unbekannt ist⁴⁰⁴. Als Methoden zur Identifizierung schlagen COOPER/SEIFORD/TONE⁴⁰⁵ statistische Verfahren (z.B.

403) Vgl. TULKENS (1993) S. 183.

404) Vgl. CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000B) S. 13 und S. 15.

405) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 102 f.

lineare Regression) oder Expertenmeinungen⁴⁰⁶⁾ vor. Bei den statistischen Verfahren gilt es jedoch zu beachten, dass diese gewöhnlich nicht für multiple Inputs **und** Outputs geeignet sind und sich somit nur eingeschränkt eignen⁴⁰⁷⁾.

Falls sich für die abschnittsweise log-lineare Hülle oder Cobb-Douglas-Hülle entschieden wird, geht damit auch implizit die Annahme über die Skalenerträge einher, wobei sich diese nur auf den logarithmisierten Datenraum (VRS bzw. CRS) beziehen und somit nicht auf die Ausgangsdaten übertragen lassen⁴⁰⁸⁾.

Wenn dagegen abschnittsweise lineare Hüllen angenommen werden, erfolgt als Nächstes die Überprüfung, ob die Konvexitäts-Annahme zutrifft, da die CRS- oder VRS-Skalenertragsannahme diese erfordert.

Je mehr DMUs in die Betrachtung miteinfließen, um so besser wird der effiziente Rand von T_u angenähert. Es konnte beobachtet werden, dass die Konvexitäts-Annahme im Gegensatz zur FDH-Hülle eher die Quelle für eine falsche Annäherung ist⁴⁰⁹⁾, diese jedoch bei geringer Anzahl von DMUs und bei tatsächlichem Vorliegen von Konvexität deutlich bessere Ergebnisse erzielt. Nach CHERCHYE/KUOSMANEN/POST⁴¹⁰⁾ besteht so ein Dilemma. Entweder existieren Fehler in der Effizienzbetrachtung durch die geringere Anzahl von DMUs verbunden mit zu wenigen, aber richtigen Annahmen (beim FDH-Modell - „Sample Error“) oder aber bei hoher Anzahl von DMUs durch Fehler bei zu strikten Annahmen (Konvexitäts- und VRS/CRS-Annahmen - „Spezifikation Error“)⁴¹¹⁾.

SCHEFCZYK/GERPOTT schlagen daher vor, die Ergebnisse bei verschiedenen Annahmen (CRS/Konvexität, VRS/Konvexität oder FDH) zu vergleichen, um zumindest zu ermitteln, inwieweit diese die Ergebnisse beeinflussen⁴¹²⁾. So kann bei hoher Korrelation der Ergebnisse wenigstens festgestellt werden, dass die unterschiedlichen Annahmen für die Effizienzbetrachtung eine untergeordnete Rolle spielen.

Das eigentliche Entscheidungsproblem wird dadurch jedoch nicht gelöst. Für die Konvexitäts-Annahme, die in der ökonomischen Theorie oft angetroffen wird⁴¹³⁾, muss somit geprüft werden, ob diese nicht verletzt wird, denn empirisch ist sie mehrfach widerlegt worden⁴¹⁴⁾. Eine Verletzung liegt bei IRS vor, die bspw. durch Spezialisierungs- oder Größeneffekte („economies of spezialization“ (Vorteile durch Arbeitsteilung) oder „economies of scale“ (Vorteile durch Massenproduktion)) hervorgerufen werden können. Ebenso liegt die Konvexitäts-

406) Hiermit ist wieder die subjektive Entscheidung „Was ist ein Experte“ verbunden.

407) Vgl. SARRICO/DYSON (2000) S. 789, COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 103.

408) Siehe Tabelle 2 und Kapitel 3.2.5.

409) Bei nicht-konvexem Verlauf des Randes der Technologie siehe Abbildung 7 und die Erläuterungen dazu.

410) Vgl. CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000B) S. 15.

411) Siehe auch das Stichwort „Dimensionalitätsproblem“ in Kapitel 3.4.

412) Vgl. SCHEFCZYK/GERPOTT (1995) S. 341f., wobei diese das FDH-Modell nicht berücksichtigen.

413) Vgl. FARRELL (1957) S. 255, PARK/SIMAR/WEINER (2000) S. 856.

414) Vgl. CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000A) S. 264, HASENKAMP (1976) S. 261. „[...] there are no a priori economic grounds to believe that the true production set is convex.“ CHERCHYE/KUOSMANEN/POST 2000A S. 266.

Annahme nicht vor, falls bei In- oder Outputs (bei jeweils mehr als einem) keine Substituierbarkeit vorliegt⁴¹⁵⁾. Daher muss dies durch eine Marke in der Stelle „Substituierbarkeit gegeben/irrelevant“ erfüllt werden. Bei Unsicherheit und insbesondere bei der Erfüllung der „Faustformel“ aus Kapitel 3.4 wird die Nicht-Annahme von Konvexität empfohlen, da so zwar evtl. Ineffizienzen nicht entsprechend entdeckt werden, aber bei Anwendung des FDH-Modells *die* festgestellten Ineffizienzen mit höherer Wahrscheinlichkeit zutreffen, da durch dieses Modell die Annäherung an T_u am zurückhaltendsten erfolgt⁴¹⁶⁾.

Falls die Konvexitäts-Annahme nicht zurückgewiesen wird, muss nun entschieden werden, welche Skalenertragsannahme vorliegt oder zumindest angenommen werden soll⁴¹⁷⁾. Die DEA kann zwar dazu benutzt werden, bei Vorliegen von VRS zu überprüfen, welche DEA-effizienten DMUs unter welcher Skalenertragsannahme operieren⁴¹⁸⁾, aber die Prüfung, ob VRS oder CRS vorliegen, kann damit nicht erfolgen. Wenn kein Wissen über die Skalenerträge vorliegt, so kann als Anhaltspunkt dienen, ob es den DMUs möglich ist, ihre Größe innerhalb eines angemessenen⁴¹⁹⁾ Zeitraumes unter unveränderten Faktorverhältnissen zu ändern. Falls dieses nicht zutrifft, so sollte eher von VRS ausgegangen werden, da dann evtl. größenbedingte Produktivitätsunterschiede, die zu geringeren Effizienzwerten führen, berücksichtigt werden können und somit das Verfahren diesen DMUs gegenüber angemessener ist⁴²⁰⁾.

Auf die generellen Auswirkungen der verschiedenen Technologien im Hinblick auf die Anzahl der effizienten und ineffizienten DMUs und die Aussagefähigkeit der Modelle wurde bereits in den Kapiteln 3.2.4, 3.2.5 und 3.4 hingewiesen. Daher sollte sich der Anwender sowohl bei Auswahl der Hüllenform als auch der Annahme der Konvexität und den Skalenertragsannahmen der Beeinflussungs- oder auch Manipulationsmöglichkeiten bewusst sein.

Phase 2, Teil E: In diesem Abschnitt spielen die Anwenderpräferenzen eine größere Rolle als bisher. Falls nur festgestellt werden soll, welche DMUs effizient oder ineffizient sind, so ist die Auswahl der Orientierung⁴²¹⁾ unbedeutend, und es können alle drei Transitionen schalten⁴²²⁾. Andernfalls ist im Hinblick auf den Untersuchungszweck zu entscheiden, ob die ineffizienten DMUs (eher) in der Lage sind, ihre Inputs zu verringern (Inputorientierung), ihre Outputs zu erhöhen (Outputorientierung) oder ob beides möglich ist (keine/unorientiert). Dies

415) Siehe Kapitel 3.3.6.

416) Siehe Abbildung 8 und Anhang 5. Es sei hier erneut auf die subjektive Komponente bei diesen Entscheidungen hingewiesen.

417) Falls weder VRS noch CRS vorliegen, sei auf die Möglichkeit zur Abänderung einzelner Modelle hingewiesen, siehe Tabelle 1 auf S. 25.

418) Vgl. bspw. BANKER/THRALL (1992) S. 82. Siehe auch Kapitel 2.2.4.1.

419) „Angemessen“ ist wiederum eine subjektive Entscheidung des Anwenders. Als Richtwert kann bspw. der Zeitraum bis zur nächsten Effizienzuntersuchung benutzt werden.

420) Vgl. SMITH (1997) S. 244, SCHEFCZYK/GERPOTT (1995) S. 341. Siehe auch Kapitel 2.2.4.1. Andernfalls können sich die ineffizienten DMUs darauf berufen, dass es ihnen gar nicht möglich ist, effizienter zu werden, da sie keinen Einfluss auf die DMU-Größe haben.

421) Siehe Kapitel 2.2.3.

422) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 103. Die gerichteten Kanten zeigen in beide Richtungen, so verbleibt die Marke in der Stelle „Phase 2, Teil E“.

kann auch davon abhängen, ob zu den Input- oder Outputfaktoren nicht-kontrollierbare Faktoren gehören, um dann die entsprechend andere Orientierung zu wählen und so dieses Problem zu umgehen⁴²³).

Nach einmaliger Schaltung aller möglichen Transitionen der Phase 2, Teil A bis E, können die Modellauswahltransitionen gegebenenfalls schalten. Eine Marke in einer entsprechenden Stelle zeigt, dass für dieses Modell die zu seiner Anwendung notwendigen Voraussetzungen erfüllt sind, wobei hier subjektive Entscheidungen eine nicht unbedeutende Rolle spielen. Ob die Anwendung jedoch für die vorliegende Effizienzbetrachtung ohne Modifikation sinnvoll ist, muss in Phase 3 überprüft werden.

4.4 Phase 3 - Präferenzen, Modifikationen und Überprüfungen

In Abbildung 11 ist die dritte Phase des Vorgehensmodelles abgebildet. Die obersten Stellen sind die untersten Stellen aus der Phase 2 (Abbildung 10). Die darauf folgenden Transitionen sind für die präferenzbedingte Auswahl von DEA-Modellen vorgesehen, da nicht immer eine *eindeutige* formale Auswahl möglich ist (Beispiel: Add und RAM könnten parallel ausgewählt werden).

Falls eine rein formale Auswahl angestrebt wird, so sollten alle Transitionen mit vorgelagerten⁴²⁴ Marken schalten und dieser Schritt damit quasi übersprungen werden. Sonst besteht hier eine Vielzahl von Möglichkeiten. Da in dieser Arbeit primär die Voraussetzungen der Modelle untersucht werden, wird dieser Teil nicht abschließend behandelt. Durch die beidseitig gerichteten Kanten bleiben jedoch die Marken in den jeweiligen Stellen bestehen, so dass die Auswahl der DEA-Modelle aus Phase 2 nicht verloren geht und später zur Abänderung von Präferenzen noch ersichtlich ist. Die Tabelle 2 in Anhang 7 auf S. 97 gibt mögliche Auswahlkriterien wieder⁴²⁵. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass insbesondere der Einheitenunabhängigkeit eine entscheidende Rolle zukommt⁴²⁶.

Im nächsten Schritt schalten die Transitionen *Auswahl erfolgt*, falls das jeweilige DEA-Modell auch nach der präferenzbasierten Auswahl zur Anwendung kommen kann.

Falls ein periodenübergreifender Effizienzvergleich durchgeführt werden soll, so ist diese Modifikation nun vorzunehmen (Marke in der Stelle „Window-Analyse“)⁴²⁷.

Darauf folgt die Durchführung der Berechnung der Effizienzwerte mit dem entsprechenden DEA-Modell. Erst dann werden einige Plausibilitätstests durchgeführt.

A-priori-Wissen verletzt: Falls festgestellt wird, dass die berechneten Koeffizienten für die einzelnen DMUs oder die berechnete konvexe Hülle nicht entsprechend dem Wissen des

423) Siehe Kapitel 3.6.

424) Damit sind Marken in den jeweils vorgelagerten Stellen gemeint.

425) Diese Tabelle basiert auf den in dieser Arbeit vorgestellten Eigenschaften.

426) Siehe Kapitel 3.3.2.

427) Siehe Kapitel 3.1.

Anwenders berücksichtigt wurden, so sind die beschriebenen Ansätze zur Restriktion der Koeffizienten oder der Erweiterung der Hülle durch „Standard-DMUs“ vorzunehmen⁴²⁸). Die-

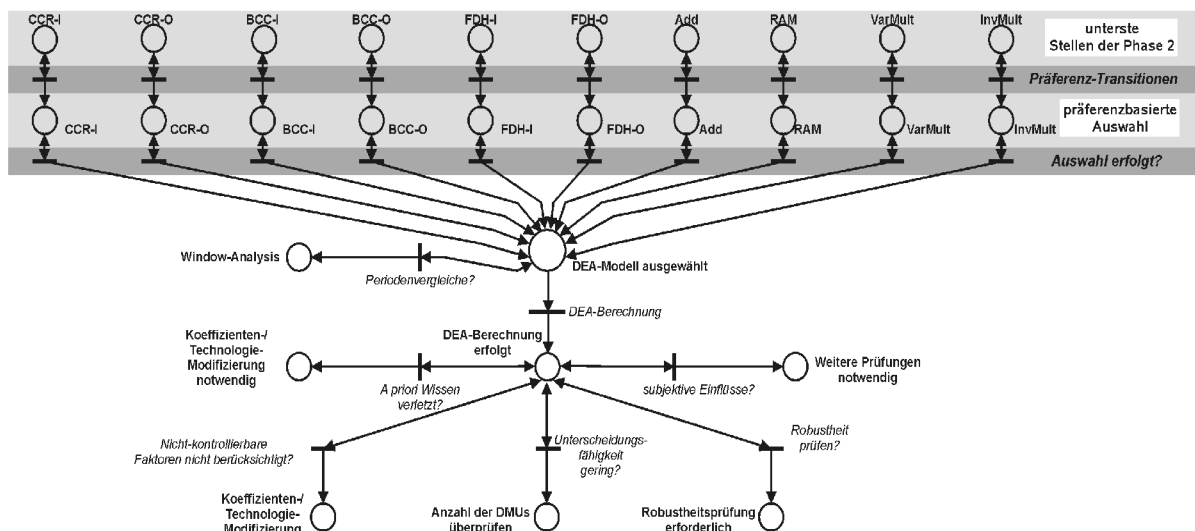


Abbildung 11: Phase 3 - Präferenzen, Modifikationen und Überprüfungen

Eigene Erstellung

se Prüfung erfolgt erst jetzt, da die angesprochenen Verfahren nicht immer notwendig sind und sehr großen Einfluss auf die Ergebnisse haben können. Durch die nachgelagerte Anwendung und den Vergleich mit den bereits berechneten Daten ist dieser Einfluss ersichtlich.

Nicht-kontrollierbare Faktoren nicht berücksichtigt: Dieser Punkt ist eng mit der Orientierungswahl verbunden⁴²⁹. Falls jedoch sowohl bei den In- als auch bei den Outputs nicht-kontrollierbare Faktoren vorhanden sind oder ein unorientiertes Modell gewählt wurde, so sind gegebenenfalls Modifikationen des DEA-Modells vorzunehmen⁴³⁰).

Ist die *Unterscheidungs-fähigkeit gering*? Dieser Fall liegt vor, wenn deutlich mehr effiziente als ineffiziente DMUs beobachtet werden, weil eine sehr hohe Anzahl von DMUs mit sich selbst verglichen wird⁴³¹. So kann mit Hilfe der in Kapitel 3.4 vorgestellten Faustformel herausgefunden werden, ob die Ursache in einer zu geringen Anzahl von DMUs begründet sein kann. Auf die Einflüsse in Bezug auf die Anzahl der effizienten DMUs bei der Modellauswahl ist ebenfalls hingewiesen worden.

Robustheit prüfen: Wenn Datenrauschen nicht ausgeschlossen werden konnte oder bei Annahme von hinreichender Stetigkeit sowie der Zulassung von nicht-kardinalen Daten ist eine Robustheitsprüfung angebracht, um festzustellen, welchen Einfluss diese Annahmen auf die Ergebnisse haben können.

Die Transition *subjektive Einflüsse?* dient weiteren Prüfungen, die zumindest aufzeigen kön-

428) Siehe Kapitel 3.5.

429) Siehe dazu „Phase 2, Teil E“ auf S. 58.

430) Siehe Kapitel 3.6.

431) Vgl. CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000B) S. 14.

nen, inwieweit unter subjektivem Einfluss stehende Annahmen die Ergebnisse beeinträchtigt haben könnten. Da im Vorhergehenden gezeigt wurde, wie oft Annahmen auf Basis von unzureichender Information getroffen werden müssen, ist eine Überprüfung durch die Variation dieser Annahmen (die dann in anderen Modellen münden) zu empfehlen⁴³². Dies geschieht, um sich der Auswirkungen auf das Ergebnis bewusst zu werden⁴³³.

5 Ergebnisse und kritische Betrachtung des Erreichten

In dieser Arbeit wurde ein dreiphasiges Vorgehensmodell zur Auswahl einer DEA-Variante erarbeitet. Das vorliegende Vorgehensmodell bietet einen guten Überblick und gewährleistet Nachvollziehbarkeit bei der DEA-Modellauswahl im Hinblick auf die getroffenen Annahmen und deren Beziehungen untereinander. Während in der ersten Phase noch sehr stark die formalen Anforderungen der DEA berücksichtigt wurden⁴³⁴, ist insbesondere in der zweiten Phase deutlich geworden, wie oft subjektive Annahmen oder Einflüsse den Ausgang der Modellauswahl und somit auch die Ergebnisse beeinträchtigen können. Der Hauptvorteil der DEA, mit möglichst wenigen Annahmen auszukommen, stellt gleichzeitig den Hauptnachteil dar, insbesondere bei dem Vergleich von wenigen DMUs im Verhältnis zur Anzahl der Faktoren⁴³⁵. Geeignete Methoden und Werkzeuge zur Überprüfung der Annahmen sind wünschenswert, allerdings ist die Frage, ob solche Methoden und Werkzeuge nicht mit weiteren Annahmen und benötigtem Vorwissen einhergehen, auf das die DEA explizit als nicht-parametrischer Ansatz verzichtet oder verzichten möchte⁴³⁶.

Es wurden auch Probleme ersichtlich, die seit der Vorstellung des ersten Modells 1978 beobachtet wurden und die praktische Anwendung beeinträchtigen. So wurden einige Modifikationen in den Auswahlprozess eingearbeitet, andere werden nachgelagert in Phase 3 behandelt, um der Effizienzbetrachtung durch die DEA ein breiteres Anwendungsfeld zu ermöglichen. Hierbei besteht jedoch noch Forschungsbedarf, da die in Ansätzen vorgestellten Modifikationen zwar als modellunabhängig propagiert werden, die Wechselwirkungen von verschiedenen Modifikationen untereinander jedoch nicht oder nicht ausreichend erforscht sind⁴³⁷. Zudem umfasst das vorliegende Vorgehensmodell auf Grund des vorgegebenen Rahmens dieser Arbeit bei weitem nicht alle möglichen Modifikationen in ausreichender Tiefe, so dass eine breitere Ausarbeitung möglich und auch wünschenswert ist.

Das vorliegende Vorgehensmodell schließt jedoch insbesondere die Lücke einer unter formalen Gesichtspunkten orientierten Auswahl einer DEA-Variante. Ein weiterer Ausbau ist wünschenswert, um so noch mehr Anwendungsfälle abzudecken, mehr DEA-Modelle und

432) „[...] try different models and methods, compare results and utilize expert knowledge on the problem [...] COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 104.

433) Siehe auch Kapitel 3.4.

434) Allerdings sind auch hier die subjektiven Einflüßsmöglichkeiten sehr groß.

435) Siehe Kapitel 3.4.

436) Siehe Kapitel 3.2 und die Fußnote 223).

437) Es wurde keine Literatur gefunden, die in einem DEA-Ansatz mehr als zwei Modifikationen miteinander kombinierte.

Modifikationen zu berücksichtigen und durch bessere Überprüfungen der Annahmen eine weniger subjektivere Auswahl und somit auch objektivere DEA-Ergebnisse zu erreichen.

Literaturverzeichnis

ALI/LERME/SEIFORD (1995):

Ali, A.I.; Lerne, C.S.; Seiford, L.M.: Components of efficiency evaluation in data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 80 (1995), S. 462-473.

ALI/SEIFORD (1990):

Ali, A. I.; Seiford, L. M.: Translation Invariance in Data Envelopment Analysis. In: Operations Research Letters, Vol. 9 (1990), S. 403-405.

ALI/SEIFORD (1993):

Ali, I.A., Seiford, L.M.: The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis. In: Fried, H.O.; Lovell, C.A.K.; Schmidt, S.S. (Hrsg.): The Measurement of Productive Efficiency - Techniques and Applications. New York 1993, S. 120-159.

ALLEN (1998):

Allen, K.: Möglichkeiten und Grenzen der Data Envelopment Analysis im Rahmen des Öko-Controlling, In: Dyckhoff, H.; Ahn, H. (Hrsg.): Produktentstehung, Controlling und Umweltschutz. Heidelberg 1998, S. 327-352.

ALLEN (2002):

Allen, K.: Messung ökologischer Effizienz mittels Data Envelopment Analysis. Dissertation Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen 2002, Wiesbaden 2002.

ALLEN/ATHANASSOPOULOS/DYSON ET AL. (1997):

Allen, R.; Athanassopoulos, A.; Dyson, R.G. et al.: Weight restrictions and value judgement in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions. In: Annals of Operations Research, Vol. 73 (1997), S. 13-34.

ASMILD/PARADI/AGGARWALL ET AL. (2004):

Asmild, M.; Paradi, J.C.; Aggarwall, V.; Schaffnit, C.: Combining DEA Window Analysis with the Malmquist Index Approach in a Study of the Canadian Banking Industry. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 21 (2004), S. 67-89.

ASSENMACHER (1998):

Assenmacher, W.: Deskriptive Statistik. 2. verb. Auflage, Berlin/Heidelberg 1998.

BANKER (1984):

Banker, R. D.: Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 17 (1984), S. 35-44.

BANKER/CHANG/COOPER (1996):

Banker, R.D.; Chang, H.; Cooper, W.W.: Simulation studies of efficiency, returns to scale and misspecification with nonlinear functions in DEA. In: Annals of Operations Research, Vol. 66 (1996), S. 233-253.

BANKER/CHARNES/COOPER (1984):

Banker, R. D.; Charnes, A.; Cooper, W. W.: Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. In: Management Science, Vol. 30 (1984), S. 1078-1092.

BANKER/MOREY (1986):

Banker, R. D.; Morey, Richard C.: Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs. In: Operations Research, Vol. 34 (1986), S. 513-521.

BANKER/THRALL (1992):

Banker, R. D.; Thrall, R.M.: Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 62 (1992), S. 74-84.

BERGER/HUMPHREY (1997):

Berger, A.N.; Humphrey, D.B.: Efficiency of financial institutions: International survey and directions for future research. In: European Journal of Operational Research, Vol. 98 (1997), S. 175-212.

BOGETOFT (1996):

Bogetoft, P.: DEA on Relaxed Convexity Assumptions. In: Management Science, Vol. 42 (1996), S. 457-465.

BOHR (1993):

Bohr, K.: Effizienz und Effektivität, In: Wittmann, W.; Kern, W.; Köhler, R. et al. (Hrsg.): Handwörterbuch der Betriebswirtschaft. 5. Auflage, Band 1,1 Teilband 1: A-H, Stuttgart 1993, S. 855-869.

BOUSSOFIANE/DYSON/THANASSOULIS (1991):

Bousofiane, A.; Dyson, R.G.; Thanassoulis, E.: Applied data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 52 (1991), S. 1-15.

BREMER (1998):

Bremer, G.: Genealogie von Entwicklungsschemata, In: Kneuper, R.; Müller-Luschnat, G.; Oberweis, A. (Hrsg.): Vorgehensmodelle für die betriebliche Anwendungsentwicklung. Stuttgart/Leipzig 1998, S. 32-59.

BROCKETT/CHARNES/COOPER ET AL. (1997):

Brockett, P.L.; Charnes, A.; Cooper, W.W.; Huang, Z.M. et al.: Data transformations in DEA cone ratio envelopment approaches for monitoring bank performances. In: European Journal of Operational Research, Vol. 98 (1997), S. 250-268.

CHARNES/COOPER (1984):

Charnes, A.; Cooper, W. W.: The non-Archimedean CCR ratio for efficiency analysis: A rejoinder to Boyd and Färe. In: European Journal of Operational Research, Vol. 15 (1984), S. 334-335.

CHARNES/COOPER (1985):

Charnes, A.; Cooper, W.W.: Preface to Topics in Data Envelopment Analysis. In: Annals of Operations Research, Vol. 2 (1985), S. 59-84.

CHARNES/COOPER/GOLANY ET AL. (1985):

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Golany, B. et al.: Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions. In: Journal of Econometrics, Vol. 30 (1985), S. 91-107.

CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994):

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Lewin, A. Y. et al.: Data Envelopment Analysis - Theory, Methodology, and Application. 2. Auflage, Bosten/Dordrecht/London 1994.

CHARNES/COOPER/RHODES (1977):

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Rhodes, E.: Measuring the Efficiency of Decision Making Units with Some New Production Functions and Estimation Methods. Austin 1977.

CHARNES/COOPER/RHODES (1978):

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Rhodes, E.: Measuring the efficiency of decision making units. In: European Journal of Operational Research, Vol. 2 (1978), S. 429-444.

CHARNES/COOPER/RHODES (1979):

Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes, E.: Short communication: Measuring the efficiency of decision-making units. In: European Journal of Operational Research, Vol. 3 (1979), S. 339.

CHARNES/COOPER/RHODES (1981):

Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes, E.: Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through. In: Management Science, Vol. 27 (1981), S. 668-697.

CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL. (1983):

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Seiford, L. M. et al.: Invariant Multiplicative Efficiency and Piecewise Cobb-Douglas Envelopments. In: Operations Research Letters, Vol. 2 (1983), S. 101-103.

CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL.(1982):

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Seiford, L. M. et al.: A Multiplicative Model for Efficiency Analysis. In: Socio-Economic Planning Science, Vol. 16 (1982), S. 223-224.

CHARNES/COOPER/THRALL (1991):

Charnes, A.; Cooper, W.W.; Thrall, R.M.: A Structure for Classifying and Characterizing Efficiency and Inefficiency in Data Envelopment Analysis. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 2 (1991), S. 197-237.

CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000A):

Cherchye, L.; Kuosmanen, T.; Post, T.: What ist the Economic Meaning of FDH? A Reply to Thrall. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 13 (2000), S. 263-267.

CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2000B):

Cherchye, L.; Kuosmanen, T.; Post, T.: Why Confexify? An Assessment of Convexity Axioms in DEA, Working Paper W-270, Helsinki School of Economics and Business Administration, 2000.

CHERCHYE/KUOSMANEN/POST (2001):

Cherchye, L.; Kuosmanen, T.; Post, T.: FDH Directional Distance Functions with an Application to European Commercial Banks. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 15 (2001), S. 201-215.

COOPER/DENG/GU ET AL. (2001):

Cooper, W.W.; Deng, H.; Gu, B. et al.: Using DEA to improve the management of congestion in Chinese industries (1981-1997). In: Socio-Economic Planning Sciences, Vol. 35 (2001), S. 227-242.

COOPER/PARK/PASTOR (1999):

Cooper, W.W.; Park, K. S.; Pastor, J. M.: RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 11 (1999), S. 5-42.

COOPER/PARK/PASTOR (2001):

Cooper, W.W.; Park, K.S.; Pastor, J.T.: The Range Adjusted Measure (RAM) in DEA: A Response to the Comment by Steinmann und Zweifel. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 15 (2001), S. 145-152.

COOPER/SEIFORD/TONE (2000):

Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Tone, K.: Data Envelopment Analysis - A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver-Software. 3. Auflage, Bosten/Dordrecht/London 2000.

COOPER/SEIFORD/ZHU (2000):

Cooper, W.W.; Seiford, L.M.; Zhu, J.: A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA. In: Socio-Economic Planning Sciences, Vol. 34 (2000), S. 1-25.

COOPER/THOMPSON/THRALL (1996):

Cooper, W.W.; Thompson, R.G.; Thrall, R.M.: Introduction: Extensions and new developments in DEA. In: Annals of Operations Research, Vol. 66 (1996), S. 3-45.

DRUMM (2000):

Drumm, J.: Personalwirtschaft. 3. Auflage, Berlin/Heidelberg 2000.

DYCKHOFF (1994):

Dyckhoff, H.: Betriebliche Produktion. 2. Auflage, Berlin/Heidelberg 1994.

DYCKHOFF (2003):

Dyckhoff, H.: Grundzüge der Produktionswirtschaft. 4. Auflage, Berlin/Heidelberg 2003.

DYCKHOFF/ALLEN (1999):

Dyckhoff, H.; Allen, K.: Theoretische Begründung einer Effizienzanalyse mittels Data Envelopment Analysis (DEA). In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 51 (1999), S. 411-436.

DYSON/ALLEN/CAMANHO ET AL. (2001):

Dyson, R.G.; Allen, R.; Camanho, A.S. et al.: Pitfalls and protocols in DEA. In: European Journal of Operational Research, Vol. 132 (2001), S. 245-259.

EMROUZNEJAD (2004):

Emrouznejad, A.: Encyclopedia of DEA Models [Im Internet unter der URL: <http://www.deazone.com/models/index.htm>, Datum des Zugriffs: 09.03.2004].

EN ISO 9000 o.V. (2000):

o.V.: EN ISO 9000:2000. Brüssel 2000.

FARRELL (1957):

Farrell, M.J.: The Measurement of Productive Efficiency. In: Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 120 (1957), S. 253-290.

FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1985):

Färe, R.; Grosskopf, S.; Lovel, C.A. K.: The Measurement of Efficiency of Production. Bosten/Dordrecht/Lancaster 1985.

FÄRE/GROSSKOPF/LOVELL (1994):

Färe, R.; Grosskopf, S.; Lovel, C.A. K.: Production Frontiers. Cambridge 1994.

FÄRE/JANSSON (1976):

Färe, R.; Jansson, L.: Joint Inputs and the Law of Dimishing Returns. In: Journal of Economics, Vol. 36 (1976), S. 407-416.

FEHL/OBERENDER (2002):

Fehl, U.; Oberender, P.: Grundlage der Mikroökonomie: eine Einführung in die Produktions-, Nachfrage- und Markttheorie. 8. Auflage, München 2002.

FISCHER/BISKUP/MÜLLER-LUSCHNAT (1998):

Fischer, T.; Biskup, H.; Müller-Luschnat, G.: Begriffliche Grundlagen für Vorgehensmodelle, In: Kneuper, R.; Müller-Luschnat, G.; Oberweis, A. (Hrsg.): Vorgehensmodelle für die betriebliche Anwendungsentwicklung. Stuttgart/Leipzig 1998, S. 13-31.

FØRSUND/LOVELL/SCHMIDT (1980):

Førsund, F. R.; Lovell, C. A. K.; Schmidt, P.: A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement. In: Journal of Econometrics, Vol. 13 (1980), S. 5-25.

FØRSUND/SARAFOGLOU (2002):

Førsund, F. R.; Sarafoglou, N.: On the Origins of Data Envelopment Analysis. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 17 (2002), S. 23-40.

FRIED/LOVELL/SCHMIDT ET AL. (2002):

Fried, H.O.; Lovell, C.A.K.; Schmidt, S.S. et al.: Accounting for Environmental Effects and Statistical Noise in Data Envelopment Analysis. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 17 (2002), S. 157-174.

FRIEDMAN/SINUANY-STERN (1998):

Friedman, Lea; Sinuany-Stern, Z.: Combining Ranking Scales and Selecting Variables in the DEA Context: The Case of Industrial Branches. In: Computers and Operations Research, Vol. 25 (1998), S. 781-791.

GLEICH (1997):

Gleich, R.: Performance Measurement. In: Die Betriebswirtschaft, 57. Jg. (1997), S. 114-117.

GOLANY/ROLL (1994):

Golany, B.; Roll, Y.: Incorporating Standards Via DEA, In: Charnes, A.; Cooper, W. W.; Lewin, A. Y. et al. (Hrsg.): Data Envelopment Analysis - Theory, Methodology, and Application. 2. Auflage, Boston/Dordrecht/London 1994, S. 313-328.

HARTUNG (1999):

Hartung, J.: Statistik - Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. 12. Auflage, München/Wien 1999.

HASENKAMP (1976):

Hasenkamp, G.: A Study of Multiple-Output Production Functions. In: Journal of Econometrics, Vol. 4 (1976), S. 253-262.

HEUCK/DETTMANN (1995):

Heuck, K.; Dettmann, K.-D.: Elektrische Energieversorgung. 3. Auflage, Braunschweig/Wiesbaden 1995.

HUGHES/YAISAWARNG (2004):

Hughes, A.; Yaisawarng, S.: Sensitivity and dimensionality tests of DEA efficiency scores. In: European Journal of Operational Research, Vol. 154 (2004), S. 410-422.

JENKINS/ANDERSON (2003):

Jenkins, L.; Anderson, M.: A multivariate statistical approach to reducing the number of variables in data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 147 (2003), S. 51-61.

KERSTENS/EECKAUT (1999):

Kerstens, K.; Eeckaut, P.V.: Estimating returns to scale using non-parametric deterministic technologies: A new method based on goodness-of-fit. In: European Journal of Operational Research, Vol. 113 (1999), S. 206-214.

KLEINE (2001):

Kleine, A.: Data Envelopment Analysis aus entscheidungstheoretischer Sicht. In: OR Spektrum, Vol. 23 (2001), S. 223-242.

KLEINE (2002):

Kleine, A.: DEA Effizienz - Entscheidungs- und produktionstheoretische Grundlage der Data Envelopment Analysis. 1. Auflage, Wiesbaden 2002.

KOOPMANS (1951):

Koopmans, T. C.: Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. New York 1951.

LOVELL (1993):

Lovell, C.A.K.: Production Frontiers and Productive Efficiency, In: Fried, H. O.; Lovell, C.A. K., Schmidt, S.S. (Hrsg.): The Measurement of Productive Efficiency. New York/Oxford 1993, S. 3-67.

LOVELL/PASTOR (1995):

Lovell, C.A. K.; Pastor, J. T.: Units invariant and translation invariant DEA models. In: Operations Research Letters, Vol. 18 (1995), S. 147-151.

NUNAMAHER (1985):

Nunamaker, T.R.: Using Data Envelopment Analysis to Measure the Efficiency of Non-profit Organizations: a Critical Evaluation. In: Managerial and Decision Economics, Vol. 6 (1985), S. 50-58.

OLESEN (1995):

Olesen, O.B.: Some unsolved problems in data envelopment analysis: A survey. In: International Journal of Production Economics, Vol. 39 (1995), S. 5-36.

Olesen/Petersen (1995):

Olesen, O.B.; Petersen, N.C.: Chance Constrained Efficiency Evaluation. In: Management Science, Vol. 41 (1995), S. 442-457.

Park/Simar/Weiner (2000):

Park, B.U.; Simar, L.; Weiner, C.: The FDH estimator for productivity efficiency scores. In: Econometric Theory, Vol. 16 (2000), S. 855-877.

Pastor (1996):

Pastor, J.T.: Translation invariance in data envelopment analysis: A generalization. In: Annals of Operations Research, Vol. 66 (1996), S. 93-102.

Pelte (2002A):

Pelte, F.: Wirkungsgrade der Energiewandlung, [Im Internet unter der URL: <http://energie1.physik.uni-heidelberg.de/vrlsg/dat>, Datum des Zugriffs: 12.06.2004].

Pelte (2002B):

Pelte, F.: Der thermodynamische Wirkungsgrad, [Im Internet unter der URL: <http://energie1.physik.uni-heidelberg.de/vrlsg/dat>, Datum des Zugriffs: 12.06.2004].

Petersen (1990):

Petersen, N. C.: Data Envelopment Analysis on a Relaxed Set of Assumptions. In: Management Science, Vol. 36 (1990), S. 305-314.

Pindyck/Rubinfeld (2003):

Pindyck, R. S.; Rubinfeld, D. L.: Mikroökonomie. 5. Auflage, München 2003.

Ramanathan (2003):

Ramanathan, R.: An Introduction to Data Envelopment Analysis - A Tool for Performance Measurement. Berlin/Heidelberg 2003.

Reisig (1991):

Reisig, W.: Petrinetze. 2. Auflage Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1991.

Roll/Golany (1993):

Roll, Y.; Golany, B.: Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA. In: OMEGA International Journal of Management Science, Vol. 21 (1993), S. 99-109.

Ruggiero (2004):

Ruggiero, J.: Performance evaluation when non-discretionary factors correlate with technical efficiency. In: European Journal of Operational Research, Vol. 159 (2004), S. 250-257.

Sarrico/Dyson (2000):

Sarrico, C.S.; Dyson, R.G.: Using DEA for planning in UK universities - an institutional perspective. In: Journal of the Operational Research Society, Vol. 51 (2000), S. 789-800.

Scheel (2000):

Scheel, H.: Effizienzmaße der Data Envelopment Analysis. Dissertation Universität Dortmund 2000, Wiesbaden 2000.

SCHEEL (2001):

Scheel, H.: Undesirable outputs in efficiency valuations. In: European Journal of Operational Research, Vol. 132 (2001), S. 400-410.

SCHEFCZYK (1994):

Schefczyk, M.: Kritische Erfolgsfaktoren in schrumpfenden Branchen dargestellt am Beispiel der Gießerei-Industrie. Dissertation Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Stuttgart 1994.

SCHEFCZYK (1996):

Schefczyk, M.: Data Envelopment Analysis. In: Sonderdruck aus "Die Betriebswirtschaft", 56. Jg. (1996), Heft 2, S. 167-183.

SCHEFCZYK/GERPOTT (1994):

Schefczyk, M.; Gerpott, T. J.: Operativer und finanzieller Erfolg von Luftverkehrsunternehmen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 64. Jg. (1994), S. 933-957.

SCHEFCZYK/GERPOTT (1995):

Schefczyk, M.; Gerpott, T. J.: Ein produktionswirtschaftlicher Benchmarking-Ansatz: Data Envelopment Analysis. In: Journal für Betriebswirtschaft, Vol. 45 (1995), S. 335-346.

SCHMIDT (1976):

Schmidt, P.: On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions. In: The Review of Economics and Statistics, Vol. 58 (1976), S. 238-239.

SCHMIDT (1985):

Schmidt, P.: Frontier Production Functions. In: Econometric Reviews, Vol. 4 (1985), S. 289-328.

SCHOLZE-STUBENRECHT/EICKHOFF/HALLER-WOLF (1997):

Scholze-Stubenrecht, W.; Eickhoff, B.; Haller-Wolf, A. et al.: Duden - Das Fremdwörterbuch. 6. Auflage, Mannheim 1997.

SCHÜTTE (1998):

Schütte, R.: Grundsätze ordnungsmäßiger Referenzmodellierung. Dissertation Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Wiesbaden 1998.

SENGUPTA (1989):

Sengupta, J. K.: Efficiency Analysis by Production Frontiers - The Nonparametric Approach. Dordrecht/Boston/London 1989.

SHEPHARD (1970):

Shephard, R.W.: Theory of Cost and Production Functions. Princeton, New Jersey 1970.

SMITH (1997):

Smith, P.: Model misspecification in Data Envelopment Analysis. In: Annals of Operations Research, Vol. 73 (1997), S. 233-252.

STAAT (2001):

Staat, M.: The Effect of Sample Size on the Mean Efficiency in DEA: Comment. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 15 (2001), S. 129-137.

STEINMANN/ZWEIFEL (2001):

Steinmann, L.; Zweifel, P.: The Range Adjusted Measure (RAM) in DEA: Comment. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 15 (2001), S. 139-144.

SYRJÄNEN (2004):

Syrjänen, M.J.: Non-discretionary and discretionary factors and scale in data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 158 (2004), S. 20-30.

THANASSOULIS (2001):

Thanassoulis, E.: Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis. Bosten/Dordrecht/London 2001.

THANASSOULIS/BOUSSOFIANE/DYSON (1995):

Thanassoulis, E.; Boussofiane, A.; Dyson, R.G.: Exploring output quality targets in the provision of perinatal care in England using data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 80 (1995), S. 588-607.

THANASSOULIS/DYSON/FOSTER (1987):

Thanassoulis, E.; Dyson, R.G.; Foster, M.J.: Relative Efficiency Assessments Using Data Envelopment Analysis: An Application to Data on Rates Departments. In: Journal of Operational Research Society, Vol. 38 (1987), S. 397-411.

THOMPSON/DHARMAPALA/THRALL (1994):

Thompson, R.; Dharmapala, P.S.; Thrall, R.M.: Sensitivity Analysis of Efficiency Measures with Applications to Kansas Farming and Illinois Coal Mining. In: Charnes, A.; Cooper, W. W.; Lewin, A. Y. et al. (Hrsg.): Data Envelopment Analysis - Theory, Methodology, and Application. 2. Auflage, Boston/Dordrecht/London 1994, S. 393-422.

THRALL (1996):

Thrall, R.M.: The lack of invariance of optimal dual solutions under translation. In: Annals of Operational Research, Vol. 66 (1996), S. 103-108.

THRALL (1999):

Thrall, R. M.: What is the Economic Meaning of FDH. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 11 (1999), S. 243-250.

TONE (1993):

Tone, K.: An E-Free DEA and a New Measure of Efficiency. In: Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 36 (1993), S. 167-174.

TONE/SAHOO (2004):

Tone, K.; Sahoo, B.K.: Degree of scale economics and congestion: A unified DEA approach. In: European Journal of Operational Research, Vol. 185 (2004), S. 755-772.

TULKENS (1993):

Tulkens, H.: On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts and Urban Transit. In: The Journal of Productivity Analysis, Vol. 4 (1993), S. 183-210.

VARIAN (1994):

Varian, H. R.: Mikroökonomie. 3. Auflage, München/Wien 1994.

WEBER (1973):

Weber, H.H.: Lineare Programmierung. Frankfurt am Main 1973.

WEI/YAN (2004):

Wei, Q.; Yan, H.: Congestion and returns to scale in data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Vol. 153 (2004), S. 641-660.

WIKIPEDIA (2004A):

o.V.: Wikipedia - Die Freie Enzyklopädie, Stichwort: Wirkungsgrad [Im Internet unter der URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wirkungsgrad>, Datum des Zugriffs: 12.06.2004].

WIKIPEDIA (2004B):

o.V.: Wikipedia - Die Freie Enzyklopädie, Stichwort: Carnot-Prozess [Im Internet unter der URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Carnot-Maschine>, Datum des Zugriffs: 12.06.2004].

ZHANG/BARTELS (1998):

Zhang, Y.; Bartels, R.: The Effect of Sample Size on the Mean Efficiency in DEA with an Application to Electricity Distribution in Australia, Sweden and New Zealand. In: Journal of Productivity Analysis, Vol. 9 (1998), S. 187-204.

Vorgehensmodell zur Auswahl einer Variante der Data Envelopment Analysis

Anhang

Inhaltsverzeichnis Anhang

Symbolverzeichnis Anhang.....	74
Abbildungsverzeichnis Anhang.....	75
Tabellenverzeichnis Anhang.....	75
Anhang 1: Ertragsgebirge im 2-Input / 1-Output-Fall.....	76
Anhang 2: Herleitung Primal / Dual des CCR-Modells.....	77
Ersetzungen.....	79
Umformung.....	81
Anhang 3: Mathematische Modellformulierungen.....	83
Bezeichnungen:	83
CCR.....	83
BCC.....	85
Additives Basis-Modell.....	86
Range Adjusted Measure (RAM).....	86
Variant Multiplicative Modell (VarMult).....	87
Invariant Multiplicative Modell (InvMult).....	88
FDH.....	88
Anhang 4: Translationsinvarianz.....	90
Beispiel Add-Modell.....	90
Übertragung der Translationsinvariants des Add-Modells auf die Einheitenunabhängigkeit des InvMult-Modells.....	91
Anhang 5: Anzahl radial effizienter DMUs bei verschiedenen Hüllen im Vergleich.....	92
Anhang 6: Das Vorgehensmodell im Überblick.....	93
Anhang 7: Eigenschaften der DEA-Modelle.....	97

Symbolverzeichnis Anhang

(Ergänzung zum Symbolverzeichnis des Hauptteils)

a	Anzahl der Restriktionskonstanten des Primals (Duals) / Anzahl der Zielfunktionskoeffizienten des Duals (Primals)
b	Anzahl der Zielfunktionskoeffizienten des Primals (Duals) / Anzahl der Restriktionskonstanten des Duals (Primals)
c	Anzahl der DMUs (anstelle von p)
p_t	Variable in der Standardform Primal (Dual)
q_s	Variable in der Standardform Dual (Primal)
s	Index für die Standardformen Primal / Dual
t	Index für die Standardformen Primal / Dual
α	Restriktionskoeffizienten der Standardformen Primal / Dual
β_s	Restriktionskonstante des Primals (Duals) / Zielfunktionskoeffizient des Duals (Primals)
δ_t	Zielfunktionskoeffizient des Primals (Duals) / Restriktionskonstante des Duals (Primals)

Abbildungsverzeichnis Anhang

Abbildung 1: Ertragsgebirge im 2-Input/1-Output-Fall.....	75
Abbildung 2: Effizienzhüllen im Vergleich.....	90
Abbildung 3: Vorgehensmodell zur DEA-Modell-Auswahl im Überblick.....	91
Abbildung 4: Phase 1 - Grundsätzliche Eignung für die DEA?.....	92
Abbildung 5: Phase 2 - DEA-Modellauswahl.....	93
Abbildung 6: Phase 3 - Präferenzen, Modifikationen und Überprüfungen.....	94

Tabellenverzeichnis Anhang

Tabelle 1: Primal/Dual-Umformungsvorschriften.....	78
Tabelle 2: Verschiedene Eigenschaften der DEA-Modelle.....	97

Anhang 1: Ertragsgebirge im 2-Input / 1-Output-Fall

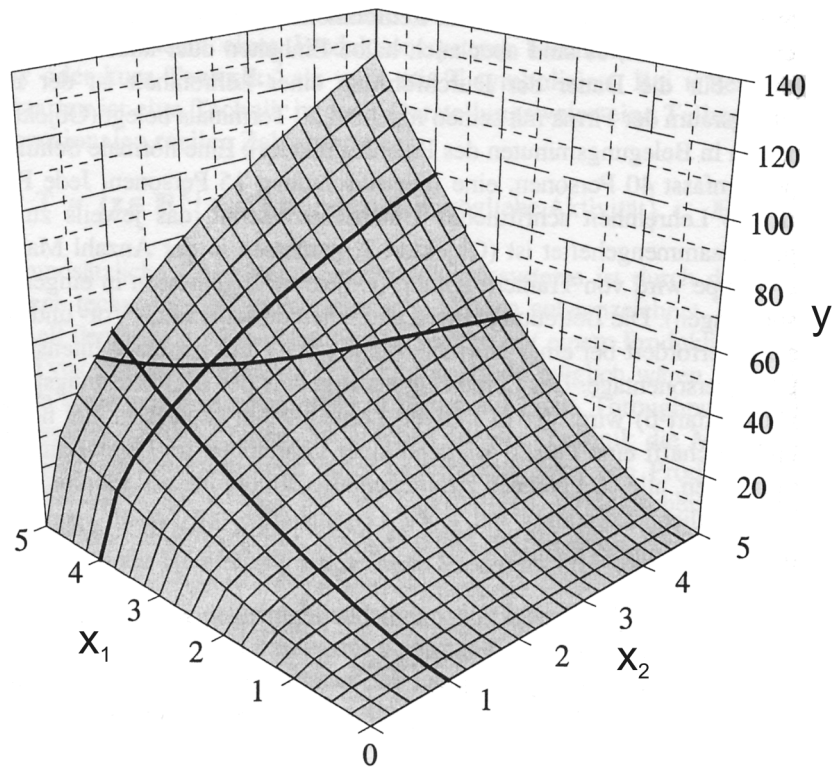


Abbildung 1: Ertragsgebirge im 2-Input/1-Output-Fall

In Anlehnung an DYCKHOFF (2003) S. 58

Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für eine dreidimensionale Technologie mit den beiden Inputs x_1 und x_2 sowie dem Output y . Bspw. ist ein Schnitt bei $y=50$ durch den „waagerechten“, dickeren Strich angedeutet. Dieser gibt die Isoquante bei konstantem Output an.

Anhang 2: Herleitung Primal / Dual des CCR-Modells

Ausgangspunkt ist das in Kapitel 2.3.1 definierte Modell.

Angenommen es sind c DMUs, für jede DMU k ($k=1, \dots, c$) gibt es

- m Inputs: $x_{1,k}, \dots, x_{m,k}$ oder als Vektor: X_k
- n Outputs: $y_{1,k}, \dots, y_{n,k}$ oder als Vektor: Y_k
- Input-Koeffizienten: $v_{1,k}, \dots, v_{m,k}$ oder als Vektor: V_k
- Output-Koeffizienten: $u_{1,k}, \dots, u_{n,k}$ oder als Vektor: U_k
- den Effizienzwert θ_k .

Dann gilt für die Effizienz (nähere Erläuterungen in Kapitel 2.3) folgendes fraktionale Problem FP_0 für alle p DMUs zu lösen ($k = 1, \dots, p$):

$$\max \theta_k = \frac{u_{1,0} * y_{1,0} + u_{2,0} * y_{2,0} + \dots + u_{n,0} * y_{n,0}}{v_{1,0} * x_{1,0} + v_{2,0} * x_{2,0} + \dots + v_{m,0} * x_{m,0}} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t,0} y_{t,0}}{\sum_{s=1}^m v_{s,0} x_{s,0}} = \frac{U_0 Y_0}{V_0 X_0} \quad (1)$$

unter den Bedingungen:

$$\frac{u_{1,0} * y_{1,k} + u_{2,0} * y_{2,k} + \dots + u_{n,0} * y_{n,k}}{v_{1,0} * x_{1,k} + v_{2,0} * x_{2,k} + \dots + v_{m,0} * x_{m,k}} = \frac{\sum_{t=1}^n u_{t,0} y_{t,k}}{\sum_{s=1}^m v_{s,0} x_{s,k}} = \frac{U_0 Y_k}{V_0 X_k} \leq 1 \quad \text{für alle } k=1, \dots, c \quad (2)$$

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (3)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (4)$$

Daraus kann mit den Koeffizientenvektoren $V'_0 (= v'_{1,0}, \dots, v'_{m,0})$ und $U'_0 (= u'_{1,0}, \dots, u'_{n,0})$ das folgende lineare Programmierungsproblem LP_0 gebildet werden:

$$\max \theta_0 = U'_0 Y_0 \quad (5)$$

unter den Bedingungen:

$$V'_0 X_0 = 1 \quad (6)$$

$$U'_0 Y_k \leq V'_0 X_k \rightarrow -V'_0 X_k + U'_0 Y_k \leq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, c \quad (7)$$

$$u'_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (8)$$

$$v'_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (9)$$

Die optimale Lösung für θ^* hat unendlich viele optimale Lösungen für V_0^* und U_0^* . Die optimale Lösung von θ^* mit V_0^* und U_0^* von LP_0 ist eine der unendlich vielen optimalen Lösungen für V_0^* und U_0^* von FP_0 , bei gleichem (optimalen) θ^* -Wert:

Durch Normierung des virtuellen Inputs auf 1 (Gleichung (6)) ergibt sich die Gleichung (5).

Die Gleichung (7) ergibt sich durch die Multiplikation von $V_0 X_k$ mit Gleichung (2), da durch $X_k \geq 0$ ¹⁾ und auf Grund der Gleichung (6) mindestens die DMU $k=0$ zu $V'X_k > 0$ führt.

Eine optimale Lösung für θ^* aus (1) ändert sich nicht, wenn der Bruch der rechten Gleichung

1) Ein $x_{i,k}$ für jedes k ist strikt größer 0.

chungsseite durch einen Faktor erweitert wird. Durch die Normierung auf $V'_0 X_0 = 1$ (6), ist die Lösung aus den Gleichungen (5) bis (9) eine der optimalen Lösungen aus den Gleichungen (1) bis (4) bei gleichem θ^* .

CHARNES/COOPER/RHODES benutzten nun die Dualtheorie, um LP_0 in ein duales Problem zu überführen²⁾. Bei der Dualtheorie³⁾ geht es darum, dass ein lineares Programmierungs-/Optimierungsproblem (Primal) durch bestimmte Vorschriften in ein sog. duales Problem (Dual) umgewandelt werden kann, welches ebenfalls einem linearen Programmierungs-/Optimierungsproblem entspricht. Die Bezeichnungen Primal und Dual hängen jedoch von der Betrachtungsweise ab.

Das *Fundamentaltheorem*⁴⁾ der Dualtheorie sagt aus, dass, falls Primal und Dual eine zulässige Lösung haben, so besitzen sie jeweils eine optimale Lösung, deren Zielfunktionswert gleich ist.

Im Folgenden wird der θ -Wert weggelassen, da er als neue (und einzige) Zielfunktionsvariable im Dual eingeführt wird und so – im Optimum – auch dem Zielfunktionswert des Primals entspricht.

Folgende Standardformen werden zu Grunde gelegt:

$$\begin{aligned} \min K \quad (\max G) &= p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2 + \dots + p_b \delta_b \\ \text{Primal (Dual):} \quad & p_1 \alpha_{s,1} + p_2 \alpha_{s,2} + \dots + p_b \alpha_{s,b} = \beta_s \quad s=1, \dots, a \\ & p_t \geq 0 \quad t=1, \dots, b \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \max G \quad (\min K) &= q_1 \beta_1 + q_2 \beta_2 + \dots + q_a \beta_a \\ \text{Dual (Primal):} \quad & q_1 \alpha_{1,t} + q_2 \alpha_{2,t} + \dots + q_a \alpha_{a,t} = \delta_t \quad t=1, \dots, b \\ & q_s \text{ unbeschränkt} \quad s=1, \dots, a \end{aligned} \quad (11)$$

Die Vorschriften zur Umformung sind in Tabelle 1 wiedergeben:

<i>Primal (Dual)</i>	\leftrightarrow	<i>Dual (Primal)</i>
1. Zielfunktionsminimierung		Zielfunktionsmaximierung
2. b Zielfunktionskoeffizienten δ_t		b Restriktionskonstanten δ_t
3. a Restriktionskonstanten β_s		a Zielfunktionskoeffizienten β_s
4. a mal b Restriktionskoeffizienten α_{st}		a mal b Restriktionskoeffizienten α_{st}
5. s -te Nebenbedingung als \geq		$q_s \geq 0$
6. s -te Nebenbedingung als \leq		$q_s \leq 0$
7. s -te Nebenbedingung als $=$		q_s unbeschränkt
8. $p_t \geq 0$		t -te Nebenbedingung als \leq
9. $p_t \leq 0$		t -te Nebenbedingung als \geq
10. p_t unbeschränkt		t -te Nebenbedingung als $=$

Tabelle 1: Primal/Dual-Umformungsvorschriften

Quelle: WEBER (1973) S. 9

2) Vgl. CHARNES/COOPER/RHODES (1978) S. 432.

3) In Anlehnung an WEBER (1973) S: 7 ff.

4) Vgl. WEBER (1973) S. 12 f.

Im Folgenden werden die in Klammern gesetzten Bezeichnungen für Primal und Dual benutzt.

Aus den Gleichungen (5) bis (9) ergibt sich:

$$\max U_0 Y_0 \quad (12)$$

unter den Bedingungen:

$$V_0 X_0 = 1 \quad (13)$$

$$-V_0 X_k + U_0 Y_k \leq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (14)$$

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (15)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (16)$$

Ersetzungen

Die Gleichung (12) (ausgeschrieben und um die Koeffizienten v_1 bis v_m und die Variable z ergänzt – die Nullen wurden zum besseren Verständnis mit einem Index versehen):

$$\max \quad u_1 * y_{1,0} + \dots + u_n * y_{n,0} + v_1 * 0_1 + \dots + v_m * 0_m + z * 0_{m+1}$$

Um die oben aufgeführten Bezeichner der Gleichungen (10) und (11) zu verwenden, werden die folgenden Ersetzungen vorgenommen:

$$u_1 \text{ bis } u_n \leftrightarrow q_1 \text{ bis } q_n$$

$$v_1 \text{ bis } v_m \leftrightarrow q_{n+1} \text{ bis } q_{n+m},$$

$$z \leftrightarrow q_{n+m+1}$$

während

$$y_{1,0} \text{ bis } y_{n,0} \leftrightarrow \beta_1 \text{ bis } \beta_n$$

$$0_1 \text{ bis } 0_m \leftrightarrow \beta_{n+1} \text{ bis } \beta_{n+m}$$

$$0_{m+1} \leftrightarrow \beta_{n+m+1} \text{ entspricht:}$$

$$\max \quad q_1 * \beta_1 + q_2 * \beta_2 + \dots + q_{n+1} * \beta_{n+1} + q_{n+2} * \beta_{n+2} + \dots + q_{n+m+1} * \beta_{n+m+1} \quad (17)$$

somit: $a = m+n+1$

Durch Ersetzung von

$$x_{1,0} \text{ bis } x_{m,0} \leftrightarrow \alpha_{n+1,1} \text{ bis } \alpha_{n+m,1}$$

folgt auf Grund von Gleichung (13) (ausgeschrieben)

$$v_1 * x_{1,0} + \dots + v_m * x_{m,0} = 1$$

die folgende Nebenbedingung:

$$q_{n+1} * \alpha_{n+1,1} + \dots + q_{n+m} * \alpha_{n+m,1} = \delta_1, \quad \text{wobei } \alpha_{1,1} \text{ bis } \alpha_{n,1} \text{ und } \alpha_{n+m+1,1} = 0 \quad (18)$$

Durch Ersetzung von

$$y_{1,1} \text{ bis } y_{n,1} \leftrightarrow \alpha_{1,2} \text{ bis } \alpha_{n,2}$$

...

$$y_{1,c} \text{ bis } y_{n,c} \leftrightarrow \alpha_{1,c+1} \text{ bis } \alpha_{n,c+1}$$

$$-x_{1,1} \text{ bis } -x_{m,1} \leftrightarrow \alpha_{n+1,2} \text{ bis } \alpha_{n+m,2}$$

...

$$-x_{1,c} \text{ bis } -x_{m,c} \leftrightarrow \alpha_{n+1,c+1} \text{ bis } \alpha_{n+m,c+1}$$

$$0_1 \text{ bis } 0_c \leftrightarrow \alpha_{n+m+1,2} \text{ bis } \alpha_{n+m+1,c+1}$$

in den (ausgeschriebenen) Gleichungen aus (14) (wieder um die Variable z ergänzt):

$$u_1 y_{1,1} + \dots + u_n y_{n,1} - v_1 x_{1,1} - \dots - v_m x_{m,1} + z * 0_1 \leq 0$$

...

$$u_1 y_{1,c} + \dots + u_n y_{n,c} - v_1 x_{1,c} - \dots - v_m x_{m,c} + z * 0_c \leq 0$$

folgen somit die Nebenbedingungen

$$q_1 * \alpha_{1,2} + \dots + q_n * \alpha_{n,2} + q_{n+1} * \alpha_{n+1,2} + \dots + q_{n+m} * \alpha_{n+m,2} + q_{n+m+1} * \alpha_{n+m+1,2} \leq \delta_2 \quad (19)$$

...

$$q_1 * \alpha_{1,c+1} + \dots + q_n * \alpha_{n,c+1} + q_{n+1} * \alpha_{n+1,c+1} + \dots + q_{n+m} * \alpha_{n+m,c+1} + q_{n+m+1} * \alpha_{n+m+1,c+1} \leq \delta_{c+1}$$

somit: $b=p+1$

Die Gleichungen (15) und (16) inklusive der neu eingeführten Variable z:

$$u_j \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

$$v_i \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m$$

z unbeschränkt

(20)

entsprechen somit den folgenden Nebenbedingungen:

$$q_1 \geq 0$$

...

$$q_n \geq 0$$

$$q_{n+1} \geq 0$$

...

$$q_{n+m} \geq 0$$

$$q_{n+m+1} \text{ unbeschränkt}$$

(21)

Umformung

Die oben aufgeführten Anweisungen der Umformung eines Primals⁵⁾ in ein Dual ergeben Folgendes:

Die b Restriktionskonstanten δ_i werden zu den Zielfunktionskoeffizienten (Vorschrift 2) und die Maximierung wird zur Minimierung (Vorschrift 1)⁶⁾:

$$\min \quad p_1 * \delta_1 + \dots + p_b * \delta_b \quad (22)$$

Die oben eingesetzten Variablen ergeben dann als Zielfunktion des Primals:

$$\min \quad p_1 * 1 + p_1 * 0 + \dots + p_b * 1 \quad \rightarrow \quad \min \quad p_1 \quad (23)$$

Auf Grund von Vorschrift 10 und 8 ergeben sich die folgenden Nebenbedingungen bei der Vereinbarung: p_1 und p_2 bis p_b werden als θ und λ_1 bis λ_c benannt.:

$$\begin{array}{ll} p_1 \text{ unbeschränkt} & \rightarrow \theta \\ p_2 \geq 0 & \rightarrow \lambda_1 \\ \dots & \dots \\ p_b \geq 0 & \rightarrow \lambda_c \end{array} \quad (24)$$

Die a Zielfunktionskoeffizienten β_s werden zu den Restriktionskonstanten (Vorschrift 3):

$$\begin{array}{l} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_a \end{array} \quad (25)$$

aus Vorschrift 5 wird somit

$$\begin{array}{l} \geq \beta_1 \\ \dots \\ \geq \beta_{a-1} \\ = \beta_a \end{array} \quad (26)$$

Zusammen mit den Restriktionskoeffizienten aus Vorschrift 4 ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1} * p_1 + \dots + \alpha_{1,b} * p_b \geq \beta_1 \\ \dots \\ \alpha_{a-1,1} * p_1 + \dots + \alpha_{a-1,b} * p_b \geq \beta_{a-1} \\ \alpha_{a,1} * p_1 + \dots + \alpha_{a,b} * p_b = \beta_a \end{array} \quad (27)$$

und somit:

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1} * p_1 + \dots + \alpha_{1,b} * p_b \geq \beta_1 \\ \dots \\ \alpha_{n,1} * p_1 + \dots + \alpha_{n,b} * p_b \geq \beta_n \\ \alpha_{n+1,1} * p_1 + \dots + \alpha_{n+1,b} * p_b \geq \beta_{n+1} \\ \dots \\ \alpha_{n+m,1} * p_1 + \dots + \alpha_{n+m,b} * p_b \geq \beta_{n+m} \\ \alpha_{n+m+1,1} * p_1 + \dots + \alpha_{n+m+1,b} * p_b = \beta_{n+m+1} \end{array} \quad (28)$$

5) Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass die in der Tabelle in Klammern gesetzten Bezeichnungen für Primal und Dual benutzt werden.

6) Die jeweiligen „Vorschriften“ ergeben sich aus der Tabelle 1.

Ersetzung von $\alpha_{1,1}$ bis $\alpha_{m+n+1,1}$:

$$\begin{aligned}
 0 * p_1 + \alpha_{1,2} * p_2 + \dots + \alpha_{1,b} * p_b &\geq \beta_1 \\
 &\dots \\
 0 * p_1 + \alpha_{n,2} * p_2 + \dots + \alpha_{n,b} * p_b &\geq \beta_n \\
 x_{1,0} * p_1 + \alpha_{n+1,2} * p_2 + \dots + \alpha_{n+1,b} * p_b &\geq \beta_{n+1} \\
 &\dots \\
 x_{m,0} * p_1 + \alpha_{n+m,2} * p_2 + \dots + \alpha_{n+m,b} * p_b &\geq \beta_{n+m} \\
 0 * p_1 + \alpha_{n+m+1,2} * p_2 + \dots + \alpha_{n+m+1,b} * p_b &= \beta_{n+m+1}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Ersetzung von $\alpha_{1,2}$ bis $\alpha_{m+n+1,b}$:

$$\begin{aligned}
 0 * p_1 + y_{1,1} * p_2 + \dots + y_{1,c} * p_b &\geq \beta_1 \\
 &\dots \\
 0 * p_1 + y_{n,1} * p_2 + \dots + \alpha_{n,c} * p_b &\geq \beta_n \\
 x_{1,0} * p_1 - x_{n+1,2} * p_2 - \dots - x_{n+1,b} * p_b &\geq \beta_{n+1} \\
 &\dots \\
 x_{m,0} * p_1 - x_{n+m,2} * p_2 - \dots - x_{n+m,b} * p_b &\geq \beta_{n+m} \\
 0 * p_1 + 0 * p_2 + \dots + 0 * p_b &= \beta_{n+m+1}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Ersetzung von β_1 bis β_{n+m+1} :

$$\begin{aligned}
 0 * p_1 + y_{1,1} * p_2 + \dots + y_{1,c} * p_b &\geq y_{1,0} \\
 &\dots \\
 0 * p_1 + y_{n,1} * p_2 + \dots + \alpha_{n,c} * p_b &\geq y_{n,0} \\
 x_{1,0} * p_1 - x_{n+1,2} * p_2 - \dots - x_{n+1,b} * p_b &\geq 0 \\
 &\dots \\
 x_{m,0} * p_1 - x_{n+m,2} * p_2 - \dots - x_{n+m,b} * p_b &\geq 0 \\
 0 * p_1 + 0 * p_2 + \dots + 0 * p_b &= 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

Ersetzung von p_1 bis p_b (siehe Gleichungen (24)):

$$\begin{aligned}
 0 * \theta + y_{1,1} * \lambda_1 + \dots + y_{1,c} * \lambda_c &\geq y_{1,0} \\
 &\dots \\
 0 * \theta + y_{n,1} * \lambda_1 + \dots + \alpha_{n,c} * \lambda_c &\geq y_{n,0} \\
 x_{1,0} * \theta - x_{n+1,2} * \lambda_1 - \dots - x_{n+1,b} * \lambda_c &\geq 0 \\
 &\dots \\
 x_{m,0} * \theta - x_{n+m,2} * \lambda_1 - \dots - x_{n+m,b} * \lambda_c &\geq 0 \\
 0 * \theta + 0 * \lambda_1 + \dots + 0 * \lambda_c &= 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

Zusammenfassung (die letzte Gleichung entfällt, da $0 = 0$ immer wahr):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^c y_{j,k} * \lambda_k &\geq y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \\
 \theta * x_{i,0} - \sum_{k=1}^c x_{i,k} * \lambda_k &\geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{33}$$

Gemeinsam mit der Zielfunktion (23) und den anderen Nebenbedingungen aus (24) ergibt sich mit den Gleichungen aus (33) das in Envelopment Form formulierte inputorientierte CCR-Modell - hier als Primal benannt⁷⁾.

7) Siehe dazu Kapitel 2.3.1.3 und Anhang 3.

Anhang 3: Mathematische Modellformulierungen

Bezeichnungen:

Folgende Bezeichnungen gelten:

- Anzahl der DMUs: p
- für jede DMU k ($k=1, \dots, p$) gibt es:
 - m Inputs: $x_{1,k}, \dots, x_{m,k}$ oder als Vektor: X_k
 - n Outputs: $y_{1,k}, \dots, y_{n,k}$ oder als Vektor: Y_k
 - Input-Koeffizienten: $v_{1,k}, \dots, v_{m,k}$ oder als Vektor: V_k
 - Output-Koeffizienten: $u_{1,k}, \dots, u_{n,k}$ oder als Vektor: U_k
 - den Effizienzwert θ_k (η_k oder Γ_k)
 - m Inputlacks: $s_{m,k}^-$ oder als Vektor S_k^-
 - n Outputlacks: $s_{n,k}^+$ oder als Vektor S_k^+

Zusätzlich gibt es:

- m Input-Spannweiten: r_i^- oder als Vektor R^-
- n Output-Spannweiten: r_j^+ oder als Vektor R^+
- Einheitsvektor E , der nur aus Einsen besteht (in entsprechender Anzahl)

CCR

Ausgangsmodell⁸⁾:

$$\max \theta = \frac{u_{1,0} * y_{1,0} + u_{2,0} * y_{2,0} + \dots + u_{n,0} * y_{n,0}}{v_{1,0} * x_{1,0} + v_{2,0} * x_{2,0} + \dots + v_{m,0} * x_{m,0}} \quad (34)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\frac{u_{1,0} * y_{1,k} + u_{2,0} * y_{2,k} + \dots + u_{n,0} * y_{n,k}}{v_{1,0} * x_{1,k} + v_{2,0} * x_{2,k} + \dots + v_{m,0} * x_{m,k}} \leq 1 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p$$

(35)

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (36)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (37)$$

Inputorientiertes CCR-Modell⁹⁾

Umformung zu einem linearen Programmierungsproblem führt zu LP₀ („multiplier form“):

$$\max U_0 Y_0 \quad (38)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$V_0 X_0 = 1 \quad (39)$$

$$-V_0 X_k + U_0 Y_k \leq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (40)$$

8) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 23.

9) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 43 ff.

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (41)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (42)$$

Umformung zum Dual DLP₀ (Envelopment Form) und dem ersten Schritt der skizzierten Lösung:

$$\min \theta_0 \quad (43)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\theta_0 * x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (44)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k \geq y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (45)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (46)$$

Schritt 2: Testen auf Slacks mit der Lösung von Schritt 1:

$$\max \omega = E * S_0^- + E * S_0^+ \quad (E * S_0^- = \sum_{i=1}^m s_{i,0}^- \quad \text{und} \quad E * S_0^+ = \sum_{j=1}^n s_{j,0}^+) \quad (47)$$

unter den Nebenbedingungen

$$s_{i,0}^- = \theta_0^* * x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (48)$$

$$s_{j,0}^+ = \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (49)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (50)$$

$$s_{i,0}^- \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

Outputorientiertes CCR-Modell

Schritt 1 - Envelopment Form¹⁰⁾:

$$\max \eta_0 \quad (51)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (52)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - \eta * y_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (53)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (54)$$

Schritt 2: Testen auf Slacks mit der Lösung von Schritt 1:

$$\max \omega = E * S_0^- + E * S_0^+ \quad (E * S_0^- = \sum_{i=1}^m s_{i,0}^- \quad \text{und} \quad E * S_0^+ = \sum_{j=1}^n s_{j,0}^+) \quad (55)$$

unter den Nebenbedingungen

10) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 58.

$$s_{i,0}^- = x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (56)$$

$$s_{j,0}^+ = \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - \eta_0^+ * y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \\ s_{i,0}^- &\geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (58)$$

BCC

Inputorientiertes BCC-Modell¹¹⁾

(outputorientiertes Modell entsprechend wie bei dem CCR-Modell abändern)

Ausgangsmodell:

$$\max \frac{\sum_{j=1}^n u_{j,0} * y_{j,0} - z_0}{\sum_{i=1}^m v_{i,0} * x_{i,0}} \quad (59)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\frac{\sum_{j=1}^n u_{j,k} * y_{j,k} - z_0}{\sum_{i=1}^m v_{i,k} * x_{i,k}} \leq 1 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (60)$$

$$u_{j,0} \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (61)$$

$$v_{i,0} \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (62)$$

$$z_0 \text{ unbeschränkt} \quad (63)$$

Envelopment Form, Schritt 1:

$$\min \theta_0 \quad (64)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\theta_0 * x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (65)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k \geq y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (66)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (67)$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (68)$$

Schritt 2 ist entsprechend den Gleichungen (34) bis (35) durchzuführen.

11) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 88.

Additives Basis-Modell

Für jede DMU₀ löse folgende Gleichungen¹²⁾:

$$\max E * S_0^- + E * S_0^+ \quad (69)$$

unter den Nebenbedingungen

$$s_{i,0}^- = x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \rightarrow \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k + s_{i,0}^- = x_{i,0} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (70)$$

$$s_{j,0}^+ = \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - y_{j,0} \rightarrow \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - s_{j,0}^+ = y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (71)$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (72)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (73)$$

$$s_{i,0}^- \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

Range Adjusted Measure (RAM)

Für jede DMU₀ ist folgende Gleichung zu lösen (R_i⁻ steht jeweils für die Differenz zwischen dem größten und kleinsten gemessenen Inputwert, R_j⁺ entsprechend für die Differenz bei den Outputwerten)¹³⁾:

$$0 \leq \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{i,0}^-}{R_i^-} + \sum_{j=1}^n \frac{s_{j,0}^+}{R_j^+} \right) \leq 1 \quad (74)$$

Dabei ist zu beachten, dass kleinere Werte für eine höhere Effizienz stehen. Der Wert 0 steht für effizient, 1 für maximal ineffizient. Deshalb wurde dieses Ergebnis von 1 subtrahiert und folgende Gleichung eingeführt:

$$0 \leq \Gamma = 1 - \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{i,0}^-}{R_i^-} + \sum_{j=1}^n \frac{s_{j,0}^+}{R_j^+} \right) \leq 1 \quad (75)$$

Hierbei ist zu beachten, dass auf Grund der obigen Gleichung keinerlei Nebenbedingungen, Maximierungs- oder Minimierungsanweisungen gegeben sind. Dies ist dadurch begründet, dass das RAM mit verschiedenen Modellen wie z.B. dem CCR- oder BCC-Modell kombiniert werden kann. Eine mögliche Lösung der CCR- bzw. BCC-Modelle kann somit als Grundlage zur Lösung der obigen Gleichung herangezogen werden¹⁴⁾. Da so jedoch bestimmte Eigenschaften von RAM verloren gehen können, wird nur noch das RAM-Modell mit der Konvexitätsbedingung betrachtet, die allgemeinere Form wird als RAM-Maß bezeichnet¹⁵⁾.

Das RAM(-Modell) ist somit mit den gleichen Nebenbedingungen wie denen des Add-Modells wie folgt definiert:

12) Vgl. COOPER/SEIFORD/TONE (2000) S. 91.

13) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 20 ff.

14) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 23 ff.

15) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (2001) S. 147.

$$\min \Gamma = 1 - \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_{i,0}^-}{R_i^-} + \sum_{j=1}^n \frac{s_{j,0}^+}{R_j^+} \right) \quad (76)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k + s_{i,0}^- = x_{i,0} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (77)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - s_{j,0}^+ = y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (78)$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \\ s_{i,0}^- &\geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (80)$$

Variant Multiplicative Modell (VarMult)

Ausgangsmodell¹⁶⁾:

$$\max \frac{\prod_{j=1}^n y_{j,0}^{u_j}}{\prod_{i=1}^m x_{i,0}^{v_i}} \quad (81)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\frac{\prod_{j=1}^n y_{j,k}^{u_j}}{\prod_{i=1}^m x_{i,k}^{v_i}} \leq 1, \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (82)$$

$$\begin{aligned} u_j &\geq 1 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \\ v_i &\geq 1 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (83)$$

Durch Anwendung des Logarithmus ergeben sich die folgenden Gleichungen (Multiplizier Form) - (das ^-Symbol steht für den jeweiligen logarithmischen Wert der Variable):

$$\max \sum_{j=1}^n u_{j,0} \hat{y}_{j,0} - \sum_{i=1}^m v_{i,0} \hat{x}_{i,0} \quad (84)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^n u_{j,0} \hat{y}_{j,k} - \sum_{i=1}^m v_{i,0} \hat{x}_{i,k} \leq 0, \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (85)$$

$$\begin{aligned} u_j &\geq 1, \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \\ v_i &\geq 1, \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (86)$$

16) Vgl. CHARNES/COOPER/SEIFORD ET AL.(1982) S. 223 f., siehe auch dort zur Herleitung.

Als Dual in Envelopment Form:

$$\min -E * S_0^- - E * S_0^+ \quad (\text{oder } \max E * S_0^- + E * S_0^+) \quad (87)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^p \hat{x}_{i,k} * \lambda_k + s_{i,0}^- = \hat{x}_{i,0} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (88)$$

$$\sum_{k=1}^p \hat{y}_{j,k} * \lambda_k - s_{j,0}^+ = \hat{y}_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (89)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (90)$$

$$s_{i,0}^- \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

Invariant Multiplicative Modell (InvMult)

Das InvMult-Modell resultiert in der Erweiterung des VarMult-Modells um die Konvexitätsbedingung (61). Daher folgt für die Envelopment Form¹⁷⁾:

$$\min -E * S_0^- - E * S_0^+ \quad (\text{oder } \max E * S_0^- + E * S_0^+) \quad (91)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^p \hat{x}_{i,k} * \lambda_k + s_{i,0}^- = \hat{x}_{i,0} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (92)$$

$$\sum_{k=1}^p \hat{y}_{j,k} * \lambda_k - s_{j,0}^+ = \hat{y}_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (93)$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (94)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (95)$$

$$s_{i,0}^- \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

Somit ist das InvMult-Modell eine Anwendung des Add-Modells auf die logarithmisierten DMUs ($\log(X)$, $\log(Y)$)¹⁸⁾.

FDH

Inputorientiertes FDH-Modell¹⁹⁾

(outputorientiertes Modell entsprechend bei dem CCR-Modell abändern)

Envelopment Form:

$$\min \theta_0 \quad (96)$$

unter den Nebenbedingungen:

17) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 29.

18) Vgl. CHARNES/COOPER/LEWIN ET AL. (1994) S. 29.

19) Vgl. TULKENS (1993) S. 187 f.

$$\theta_0 * x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (97)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k \geq y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (98)$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (99)$$

$$\lambda_k \in \{0,1\} \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (100)$$

Anhang 4: Translationsinvarianz

Beispiel Add-Modell

Die Bezeichner sind dem Anhang 3 entsprechend definiert.

Additives Basismodell (siehe Anhang 3):

$$\max E * S_0^- + E * S_0^+ \quad (101)$$

unter den Nebenbedingungen

$$s_{i,0}^- = x_{i,0} - \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k \rightarrow \sum_{k=1}^p x_{i,k} * \lambda_k + s_{i,0}^- = x_{i,0} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (102)$$

$$s_{j,0}^+ = \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - y_{j,0} \rightarrow \sum_{k=1}^p y_{j,k} * \lambda_k - s_{j,0}^+ = y_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (103)$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (104)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{für alle } k=1, \dots, p \quad (105)$$

$$s_{i,0}^- \geq 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad s_{j,0}^+ \geq 0 \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

Seien nun w_i und z_j beliebige (positive) Werte (für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$), so gibt es einen Vektor W mit m w_i 's und einen Vektor Z mit n z_j 's, so dass gilt:

$$X_k' = X_k + W \quad \text{und} \quad Y_k' = Y_k + Z, \quad \text{somit gilt auch} \quad X_0' = X_0 + W \quad \text{und} \quad Y_0' = Y_0 + Z$$

Anstelle von X, Y und X_0, Y_0 werden nun die X', Y' und X_0', Y_0' in die Gleichungen (101) bis (102) eingesetzt:

$$\sum_{k=1}^p x'_{i,k} * \lambda_k + s_{i,0}^- = x'_{i,0} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (106)$$

$$\sum_{k=1}^p y'_{j,k} * \lambda_k - s_{j,0}^+ = y'_{j,0} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

(107)

Aus (106) und (107) folgt:

$$\sum_{k=1}^p (x_{i,k} + w_i) * \lambda_k + s_{i,0}^- = x_{i,0} + w_i \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (108)$$

$$\sum_{k=1}^p (y_{j,k} + z_j) * \lambda_k - s_{j,0}^+ = y_{j,0} + z_j \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (109)$$

Aus (108) und (109) folgt:

$$\sum_{k=1}^p (x_{i,k} * \lambda_k + w_i * \lambda_k) + s_{i,0}^- = x_{i,0} + w_i \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (110)$$

$$\sum_{k=1}^p (y_{j,k} * \lambda_k + z_j * \lambda_k) - s_{j,0}^+ = y_{j,0} + z_j \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

(111)

Aus (110) und (111) folgt:

$$\sum_{k=1}^p (x_{i,k} * \lambda_k) + \sum_{k=1}^p (w_i * \lambda_k) + s_{i,0}^- = x_{i,0} + w_i \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (112)$$

$$\sum_{k=1}^p (y_{j,k} * \lambda_k) + \sum_{k=1}^p (z_j * \lambda_k) - s_{j,0}^+ = y_{j,0} + z_j \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (113)$$

Aus (112) und (113) folgt:

$$\sum_{k=1}^p (x_{i,k} * \lambda_k) + \sum_{k=1}^p (w_i * \lambda_k) + s_{i,0}^- = x_{i,0} + w_i \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (114)$$

$$\sum_{k=1}^p (y_{j,k} * \lambda_k) + \sum_{k=1}^p (z_j * \lambda_k) - s_{j,0}^+ = y_{j,0} + z_j \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (115)$$

Aus (112), (113) und (104) folgt (da die Summe von $\lambda_k = 1$ und somit auch $w_i * \lambda_k = w_i$ oder entsprechend $z_j * \lambda_k = z_j$):

$$\sum_{k=1}^p (x_{i,k} * \lambda_k) + w_i + s_{i,0}^- = x_{i,0} + w_i \quad \text{für alle } i=1, \dots, m \quad (116)$$

$$\sum_{k=1}^p (y_{j,k} * \lambda_k) + z_j - s_{j,0}^+ = y_{j,0} + z_j \quad \text{für alle } j=1, \dots, n \quad (117)$$

Durch Subtraktion von w_i und z_j auf beiden Seiten der Gleichung (105) bzw. (103) werden wieder die ursprünglichen Nebenbedingungen (101) und (102) hergestellt. Damit ist gezeigt, dass unabhängig von der Addition von Konstanten bei den jeweiligen In- und Outputs die Nebenbedingungen und somit auch die optimale Lösung gewahrt werden.

Übertragung der Translationsinvariants des Add-Modells auf die Einheitenunabhängigkeit des InvMult-Modells

Das InvMult-Modell bezieht sich auf den logarithmisierten²⁰⁾ DMUs: $\log X_k$, $\log Y_k$.

Auf Grund der Translationsinvariants des Add-Modells folgt, dass auch $\log X_k + W$, $\log Y_k + Z$ zu den gleichen Lösungen führt.

Um so die ursprünglichen DMU-Werte zu berechnen, wird die Exponentialfunktion (Umkehrfunktion zu \log (in diesem Falle \ln) angewendet: $(e^{\log(X_k)+W}, e^{\log(Y_k)+Z}) = (X_k * e^W, Y_k * e^Z)$, wobei hier $e^W = (e^{w_1}, \dots, e^{w_m})$ und entsprechend $e^Z = (e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$ gelten.

Somit kann jede beliebige positive, lineare Einheitentransformation mit den Linearfaktoren $W' = e^W$ oder entsprechend $Z' = e^Z$ dargestellt werden.

20) Wie auch im Hauptteil dieser Arbeit wird bei \log immer vom Logarithmus Naturalis (\ln) ausgegangen.

Anhang 5: Anzahl radial effizienter DMUs bei verschiedenen Hüllen im Vergleich

In Abbildung 2²¹⁾ ist ein vergrößerter Ausschnitt der verschiedenen Hüllen aus dem Beispiel der Abbildung 8, Kapitel 3.2.5 wiedergeben. Dieser Fall ist auch bei mehrdimensionalen Inputs/Outputs gültig, da sich die effizienten, mehrdimensionalen Hüllen ebenso zueinander verhalten.

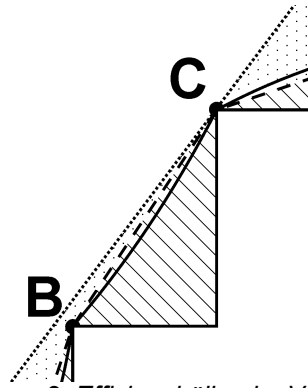


Abbildung 2: Effizienzhüllen im Vergleich

Eigene Erstellung

In dem schraffierten Bereich können DMUs liegen, die unter Annahme der FDH-Hülle effizient sind und somit eine andere FDH-Hülle definieren. Diese blieben jedoch bei VRS (des BCC-Modells) ineffizient. Entsprechendes gilt bei dem Vergleich von CRS und VRS. Hier gibt der gepunktete Bereich die möglichen DMU-Bereiche an, die unter CRS nicht effizient sind, bei VRS jedoch zur Verschiebung des effizienten Randes führen. Der InvMult-Technologiegrad dagegen verläuft mal unterhalb, mal oberhalb des VRS-Technologiegrades, so dass darüber im Vergleich zu VRS keine Aussage getroffen werden kann. Somit gilt für die Anzahl der effizienten DMUs $p_{\text{effizient}}^{22)}$:

$$p_{\text{effizient}}(\text{CRS}) \leq p_{\text{effizient}}(\text{VRS-BCC/InvMult}) \leq p_{\text{effizient}}(\text{FDH})$$

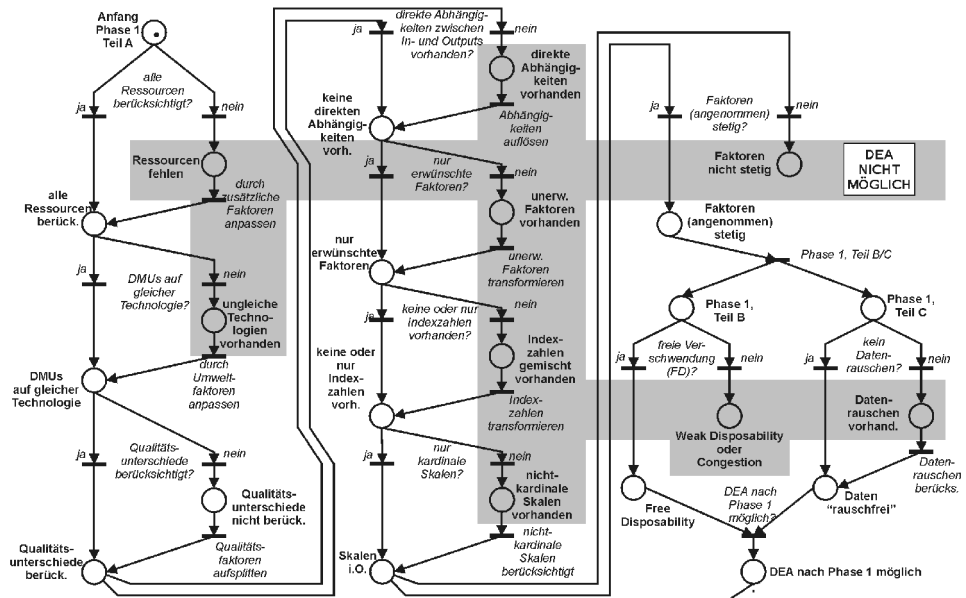
Entsprechend gilt für die Anzahl der ineffizienten DMUs $p_{\text{ineffizient}}$:

$$p_{\text{ineffizient}}(\text{CRS}) \geq p_{\text{ineffizient}}(\text{VRS-BCC/InvMult}) \geq p_{\text{ineffizient}}(\text{FDH})$$

21) Die gepunktete Linie ist der CRS-Hüllen-Ausschnitt, die gestrichelte Linie der VRS-Hüllen-Ausschnitt, die durchgezogene gekrümmte Linie der InvMult-Hüllenausschnitt und die nur waagrecht verlaufende Linie der FDH-Hüllenausschnitt.

22) Vgl. bspw. WEI/YAN (2004) S. 648.

Anhang 6: Das Vorgehensmodell im Überblick



Phase 1

Phase 2

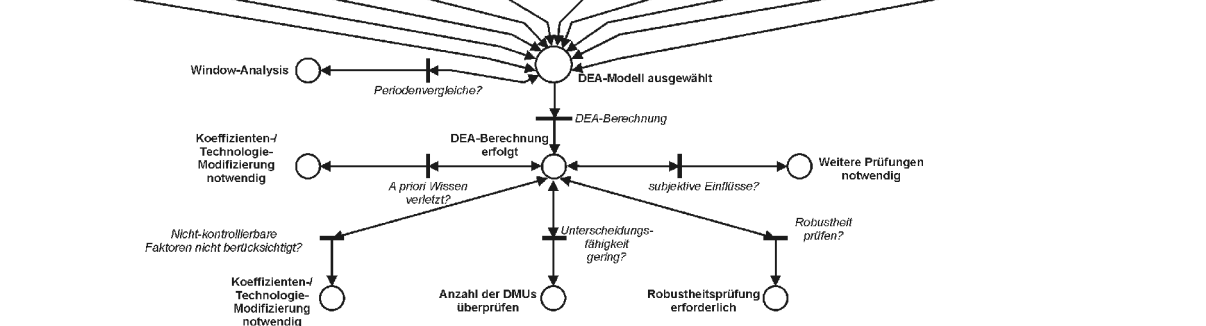
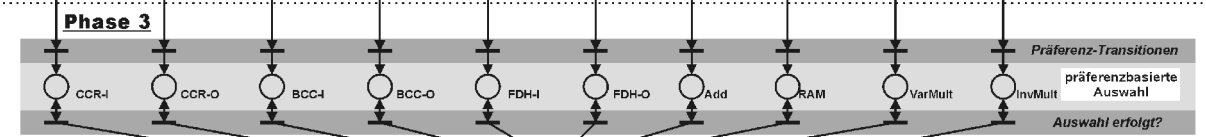
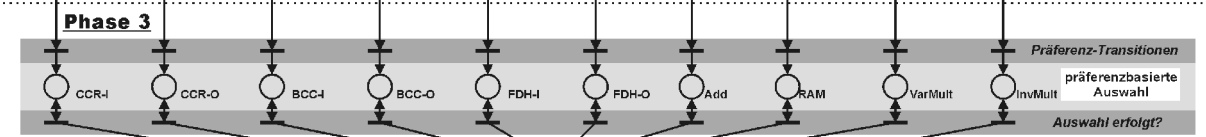
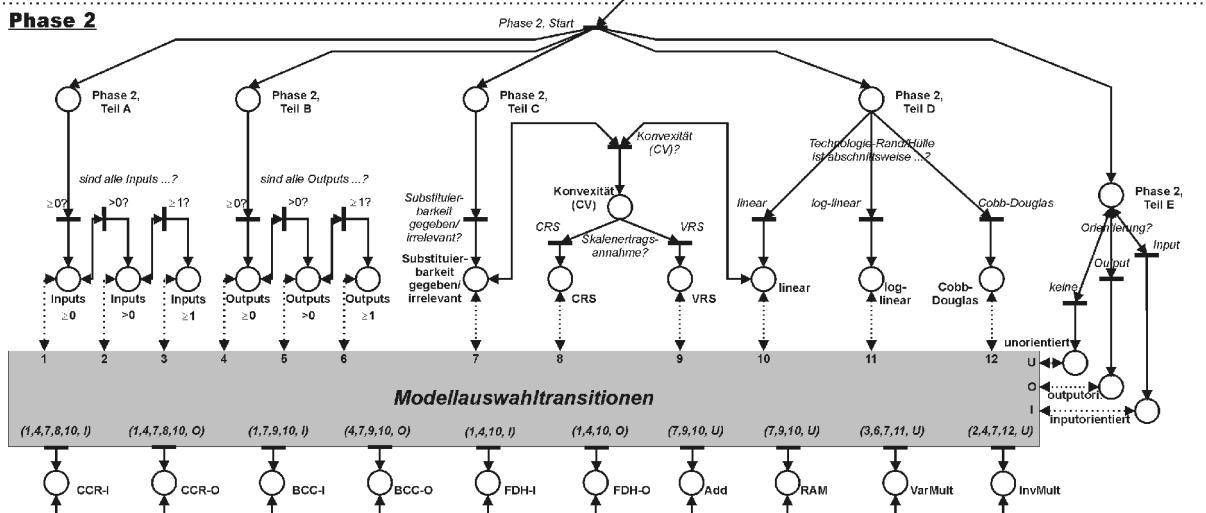


Abbildung 3: Vorgehensmodell zur DEA-Modell-Auswahl im Überblick

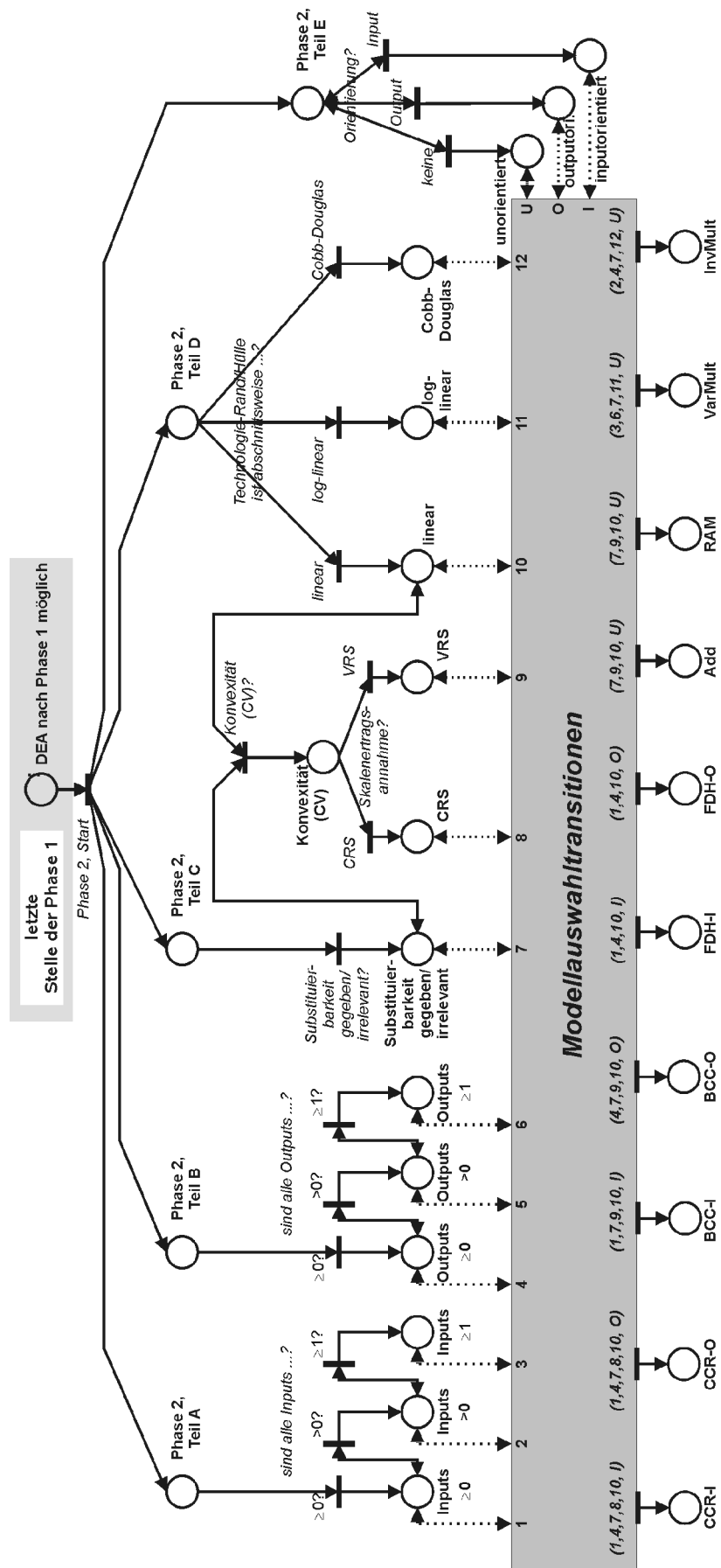


Abbildung 5: Phase 2 - DEA-Modellauswahl

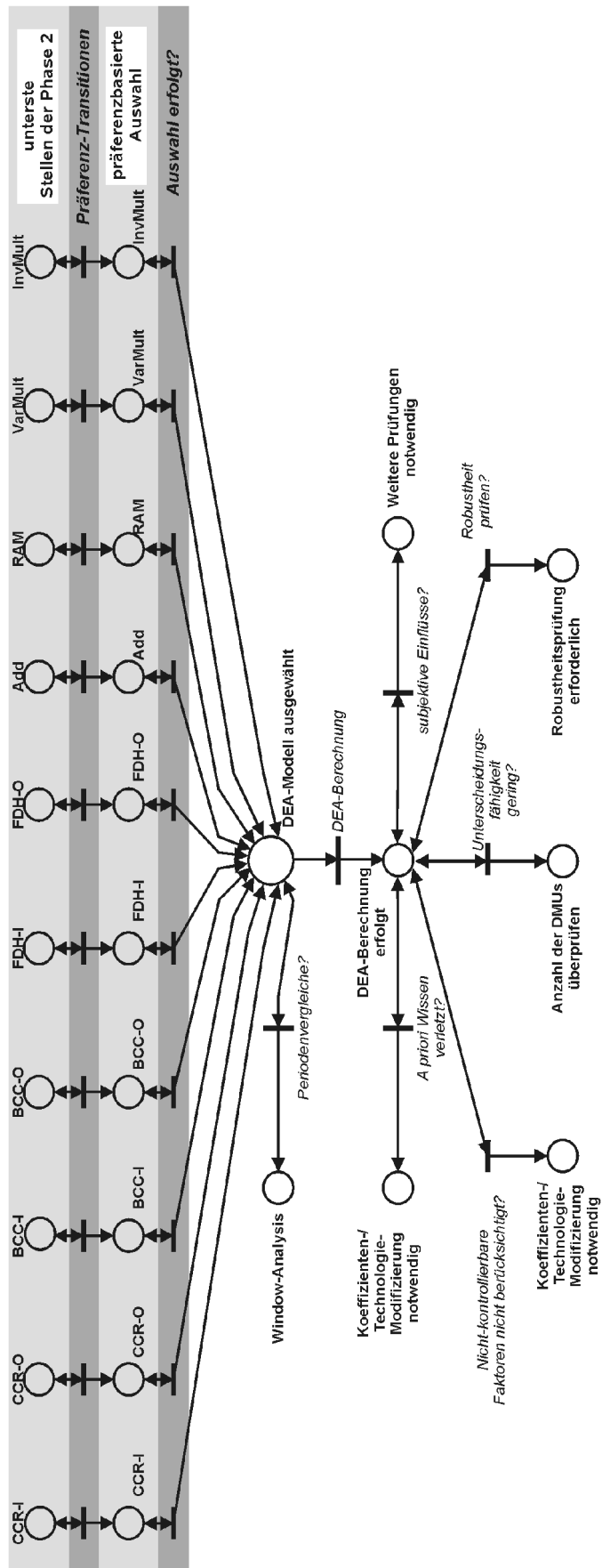


Abbildung 6: Phase 3 - Präferenzen, Modifikationen und Überprüfungen

Anhang 7: Eigenschaften der DEA-Modelle

	<i>CCR-I/O</i>	<i>BCC-I/O</i>	<i>FDH-I/O</i>	<i>RAM</i>	<i>Add</i>	<i>VarMul</i>	<i>InvMults</i>
Monotonie	+	in In- oder Out- puts	in In- oder Outputs	+	+	+	+
strikte Monotonie				+	+	+	+
Einheitenunabhängigkeit	+	+	+	+			+
Effizienz ²³⁾	radial	radial	radial	gemischt	gemischt	gemischt	gemischt
Besonderheiten				tendiert zu hohen Effizienz- werten, 0 ist jedoch auch möglich ²⁴⁾	zusätzliche bewertende Infor- mationen über die Faktoren notwendig, da alle Faktoren nur mengenmäßig betrachtet werden		

+ erfüllt

Tabelle 2: Verschiedene Eigenschaften der DEA-Modelle

Eigene Erstellung, siehe Hauptteil des Arbeitsberichtes

23) Radiale Effizienzwerte entsprechen nicht immer dem Pareto-Koopmans-Effizienzbegriff. Siehe Kapitel 2.3.1.

24) Vgl. COOPER/PARK/PASTOR (1999) S. 20 und S. 22.

**Institut für Produktion und
Industrielles Informationsmanagement
Universität Duisburg-Essen / Campus Essen**

**Verzeichnis der Arbeitsberichte
(ISSN 1614-0842)**

- Nr. 1: Zelewski, S.: Stickels theoretische Begründung des Produktivitätsparadoxons der Informationstechnik. Universität Essen, Essen 1999.
- Nr. 2: Zelewski, S.: Flexibilitätsorientierte Koordinierung von Produktionsprozessen. Universität Essen, Essen 1999.
- Nr. 3: Zelewski, S.: Ontologien zur Strukturierung von Domänenwissen. Universität Essen, Essen 1999.
- Nr. 4: Siedentopf, J.; Schütte, R.; Zelewski, S.: Wirtschaftsinformatik und Wissenschaftstheorie. Universität Essen, Essen 1999.
- Nr. 5: Fischer, K.; Zelewski, S.: Ontologiebasierte Koordination von Anpassungsplanungen in Produktions- und Logistiknetzwerken mit Multi-Agenten-Systemen. Universität Essen, Essen 1999.
- Nr. 6: Weihermann, A. E.; Wöhlert, K.: Gentechnikakzeptanz und Kommunikationsmaßnahmen in der Lebensmittelindustrie. Universität Essen, Essen 1999.
- Nr. 7: Schütte, R.: Zum Realitätsbezug von Informationsmodellen. Universität Essen, Essen 2000.
- Nr. 8: Zelewski, S.: Erweiterungen eines Losgrößenmodells für betriebliche Entsorgungsprobleme. Universität Essen, Essen 2000.
- Nr. 9: Schütte, R.: Wissen, Zeichen, Information, Daten. Universität Essen, Essen 2000.
- Nr. 10: Hemmert, M.: The Impact of Internationalization and Externalization on the Technology Acquisition Performance of High-Tech Firms. Universität Essen, Essen 2001.
- Nr. 11: Hemmert, M.: Erfolgswirkungen der internationalen Organisation von Technologiegewinnungsaktivitäten. Universität Essen, Essen 2001.
- Nr. 12: Hemmert, M.: Erfolgsfaktoren der Technologiegewinnung von F&E-intensiven Großunternehmen. Universität Essen, Essen 2001.
- Nr. 13: Schütte, R.; Zelewski, S.: Epistemological Problems in Working with Ontologies. Universität Essen, Essen 2001.
- Nr. 14: Peters, M. L.; Zelewski, S.: Analytical Hierarchy Process (AHP). Universität Essen, Essen 2002.

- Nr. 15: Zelewski, S.: Wissensmanagement mit Ontologien. Universität Essen, Essen 2002.
- Nr. 16: Klumpp, M.; Krol, B.; Zug, S.: Management von Kompetenzprofilen im Gesundheitswesen. Universität Essen, Essen 2002.
- Nr. 17: Zelewski, S.: Der „non statement view“ – eine Herausforderung für die (Re-) Konstruktion wirtschaftswissenschaftlicher Theorien –. Universität Essen, Essen 2002.
- Nr. 18: Peters, M. L.; Zelewski, S.: A heuristic algorithm to improve the consistency of judgments in the Analytical Hierarchy Process (AHP). Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2003.
- Nr. 19: Peters, M. L.; Zelewski, S.: Fallstudie zur Lösung eines Standortplanungsproblems mit Hilfe des Analytical Hierarchy Process (AHP). Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2003.
- Nr. 20: Zelewski, S.: Konventionelle versus strukturalistische Produktionstheorie. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2003.
- Nr. 21: Alparslan, A.; Zelewski, S.: Moral Hazard in JIT Production Settings. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2004.
- Nr. 22: Dittmann, L.: Ontology-based Skills Management. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2004.
- Nr. 23: Peters, M. L.; Zelewski, S.: Ein Modell zur Auswahl von Produktionsaufträgen unter Berücksichtigung von Synergien. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2004.
- Nr. 24: Peters, M. L.; Zelewski, S.: Ein Modell zur Zuordnung ähnlicher Kundenbetreuer zu Kunden. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2004.
- Nr. 25: Zelewski, S.: Kooperatives Wissensmanagement in Engineering-Netzwerken – (vorläufiger) Abschlussbericht zum Verbundprojekt KOWIEN. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2004.
- Nr. 26: Siemens, F.: Vorgehensmodell zur Auswahl einer Variante der Data Envelopment Analysis. Universität Duisburg-Essen (Campus Essen), Essen 2005.